THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

Le Titre de DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

Seyed Hossein MIRZAD

1re THÈSE : **Calcul élastique des grands barrages-voûtes dissymétriques à l'aide des ordinateurs électroniques.**

2e THÈSE : *Propositions données par la Faculté*

Utilisation frigorifique et thermique des semiconducteurs

Soutenues le 26 mai 1967, devant la Commission d'examen

Jury

MM. SIESTRUNCK		Président
VICHNIEWSKY		Examinateurs
CASEAU		
BOISSERIE		

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

Le Titre de DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

Seyed Hossein MIRZAD

1re THÈSE : **Calcul élastique des grands barrages-voûtes dissymétriques à l'aide des ordinateurs électroniques.**

2e THÈSE : *Propositions données par la Faculté*

Utilisation frigorifique et thermique des semiconducteurs

Soutenues le 26 mai 1967, devant la Commission d'examen

Jury

MM. SIESTRUNCK		Président
VICHNIEWSKY	}	Examinateurs
CASEAU	}	Examinateurs
BOISSERIE	}	Examinateurs

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Le Doyen
M. ZAMANSKY

MM.	PRENANT	T	Anatomie & histologie comparée	M.	LEVY	T	Physique théorique des hautes énergies	MM.	RIGAUDY	T	Chimie SPCN
	GRASSE	T	Evolution des êtres organisés	Mme	CHAIX	T	Chimie biologique		COLLONGUES		Chimie CPEM
	PREVOST	T	Chimie organique	MM.	HUREL PY	T	Biologie végétale CPEM		DUBERT		Biochimie
	WYART	T	Minéralogie & cristallographie		PANNETIER	T	Chimie générale I		NOZIERES		Physique générale
	TEISSIER	T	Zoologie		BRUN	T	Mécanique des fluides I		CADIOT		Chimie organique
	AUGER	T	Physique quantique & relativité	Mme	DUBREIL	T	Mathématiques (Agrégation)		IVANOFF		Océanographie physique
	MONNIER	T	Physiologie générale	Mme	LELONG	T	Mathématiques II E.N.S.		FRANÇOIS		Zoologie
	PIVETEAU	T	Paléontologie	MM.	BELLAIR	T	Géologie S.P.C.N.		TALBOT		Génie chimique
	ROCARD	T	Physique E.N.S.		COTTE	T	Physique électricité	Mme	NOUGAREDE		Botanique
	CARTAN	T	Mathématiques E.N.S.		DUBOIS J.E.	T	Chimie organique physique	MM.	BRUHAT	T	Mathématiques MPC
	LAFFITTE	T	Chimie générale		LAMOTTE	T	Zoologie E.N.S.		FOURNET		Electricité générale
	N...	T	Géométrie supérieure		OLMER	T	Energétique générale		DEHEUVELS	T	Mathématiques propédeutique
	COULOMB	T	Physique du globe		GAUTHIER	T	Mécanique appliquée		FURON	T	Géologie SPCN
Mlle	COUSIN	T	Biologie animale SPCN		BARCHEWITZ	T	Chimie physique	Mme	GANS	T	Génétique
MM.	CHRETIEN	T	Chimie minérale		BROSSEL	T	Physique atomique	MM.	GENEVES		Biologie végétale CPEM
	BOCQUET	T	Zoologie		BUSER	T	Physiologie comparée		HUPE	T	Pétrographie
	KASTLER	T	Physique E.N.S.		CAMUS	T	Physiologie végétale		HOLLANDE	T	Biologie générale
	EPHRUSSI	T	Génétique		CURIEN	T	Minéralogie & cristallographie		LIONS	T	Analyse numérique
	GAUTHERET	T	Biologie végétale CPEM		POSSOMPES	T	Zoologie		MAITTE	T	Chimie organique
	LUCAS R.		Recherches physiques		PULLMANN	T	Chimie quantique		NICOLAS		Géologie appliquée
	THOMAS A.	T	Biologie cellulaire		TEILLAC	T	Physique nucléaire & radio-activité		PANIGEL		Biologie générale
	MORAND	T	Physique enseignement		VILLE	T	Econométrie		RAVIER	T	Pétrographie
	SOLEILLET	T	Physique CPEM		WILLEMART	T	Chimie CPEM		MOREL F.	T	Physiologie comparée
	FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides		FREYMANN	T	Recherches physiques		ROSEAU	T	Mécanique théorique des fluides
	DRACH	T	Zoologie		ROLLET	T	Chimie minérale		ROUBINE		Electronique E.S.E.
	QUENEY	T	Météorologie & dynamique de l'atmosphère	Mlle	JOSIEN	T	Chimie SPCN		SILBER	T	Chimie CPEM
				MM.	CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique & théorie des groupes		UEBERSFELD	T	Electronique
	GALLIEN	T	Embryologie							T	Théories physiques
	EICHHORN	T	Botanique		GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides		HERVE	T	Mathématiques
	DE CUGNAC	T	Biologie végétale SPCN		LUCAS G.	T	Géologie	Mme	PECKER-WIMEL	T	Astrophysique
Mlle	CAUCHOIS	T	Chimie physique		ALLARD	T	Chimie physique	MM.	BALKANSKI		Physique M.P.C.
MM.	THELLIER	T	Physique du globe		BERTHELOT	T	Physique des particules fondamentales		LE CORRE	T	Electricité
	PONCIN	T	Mécanique générale		BRICARD	T	Météorologie		NATAF	T	Physique nucléaire & radio-activité
	DUBREIL	T	Arithmétique & théorie des nombres	Mme	ALBE-FESSARD	T	Psycho-physiologie		ECHALIER		Biologie animale CPEM
	QUELET	T	Chimie organique	MM.	JULIA	T	Etude des molécules naturelles complexes		BARRAUD	T	Physique CPEM
	CAGNIARD	T	Géophysique appliquée						DARS		Géologie structurale & appliquée
	CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire		MAGAT	T	Physico-chimie des rayonnements		CAMEFORT	T	Botanique (agrégation)
	CUVILLIER	T	Micropaléontologie	Mlle	QUINTIN	T	Electrochimie		VICHNIEWSKY	T	Mécanique industrielle
	JUNG	T	Géologie	MM.	MONOD	T	Chimie du métabolisme		SIGWALT	T	Chimie SPCN
	TRILLAT	T	Microscopie & diffraction électronique		DE POSSEL	T	Analyse numérique		BLAQUIERE		Electronique
	WIEMANN	T	Chimie organique & structurale		CHARLOT	T	Chimie analytique		BARUCH		Physique propédeutique
	VASSY	T	Physique de l'atmosphère						ARNOUS	T	Physique théorique
	DESTOUCHES	T	Théorie physique		CHATELET	T	Chimie CPEM		SLONIMSKI		Génétique
	AMIEL	T	Chimie générale		MATTLER	T	Physique SPCN		MALLIAVIN	T	Mathématiques propédeutique
	HOCART	T	Minéralogie & cristallographie		BOUISSIERES	T	Radiochimie		GAUDEMAR		Chimie propédeutique
	J.P. MATHIEU	T	Physique optique	Mme	COUTURE	T	Thermodynamique & mécanique physique		BROUSSE	T	Mécanique théorique
	COUTEAUX	T	Cytologie						ROSCH	T	Astronomie
	CHOQUET	T	Théorie des fonctions & topologie	MM.	FRANC	T	Biologie animale CPEM		GUY	T	Physique expérimentale
	FELDMANN	T	Biologie végétale marine		SCHNELL	T	Botanique tropicale		LAZARD		Mathématiques MPC
	JOST	T	Physiologie comparée		STOLKOWSKI	T	Physiologie générale		MOREL P.		Physique MPC
	FORTET	T	Calcul des probabilités & physique mathématiques		ACHER	T	Chimie biologie		ARSAC		Programmation
					BAUDOIN	T	Biologie animale CPEM		LEFEBVRE		Chimie MPC
	SCHWARTZ	T	Calcul différentiel & intégral		BEAUMONT		Biologie animale SPCN		BOK		Physique propédeutique
	CHOUARD	T	Physiologie végétale		BLAMONT		Géophysique ionosphère		CHAPEVILLE		Biochimie
	MALAVARD	T	Aviation (technique aéronautique)		BOUREAU	T	Botanique		BENOIT		Physique CPEM
	BRELOT	T	Analyse supérieure		CURIE D.		Physique MGP		RIO		Chimie CPEM
	NORMANT	T	Synthèse organique		DURAND DELGA	T	Géologie		JAUZEIN		Géologie ENS
	BENARD	T	Chimie appliquée		HELLER	T	Physiologie végétale		PREVOST G.		Biologie végétale CPEM
	DUGUE	T	Statistique mathématique		TORTRAT	T	Calcul des probabilités		FAVARD P.		Biologie animale CPEM
	SOULAIRAC	T	Psychophysiologie		CAILLEUX	T	Géologie SPCN	Mme	CHARNIAUX-COTTON		Evolution des êtres organisés
	ULRICH	T	Physiologie végétale appliquée		MAGNAN		Physique électricité	Mlle	FICINI		Chimie CPEM
	KIRRMANN	T	Théories chimiques		DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire	MM.	LEQUEUX		Astronomie
	CHADEFAUD	T	Botanique	Mlle	FOURCROY		Biologie végétale SPCN		COHEN TANNOUDJI		Physique atomique
Mlle	LE BRETON	T	Physiologie de la nutrition	Mme	CHOQUET BRUHAT		Mécanique analytique & mécanique céleste		TAVERNIER		Physique CPEM
MM.	LELONG	T	Application de l'analyse à la géométrie						DURAND Michel		Biologie animale SPCN
	DEVILLERS	T	Anatomie & histologie comparées	Mlle	VEIL	T	Physiologie générale		PASCAUD		Physiologie
	EHRESMANN	T	Topologie algébrique	MM.	LWOFF	T	Microbiologie	Mme	PETIT		Biologie animale CPEM
	FRANÇON	T	Physique SPCN		SIESTRUNCK	T	Mécanique physique & expérim.	MM.	CAGNAC		Physique agrégation
	GLANGEAUD	T	Géographie physique, géologie dynamique		CABANNES	T	Mécanique générale		FALK-VAIRANT		Physique nucléaire
	DODEMENT	T	Mathématiques MGP		CAIRE	T	Géographie physique & géologie dynamique		KRASNER	T	Mathématiques
	PISOT	T	Technique mathématique de la physique						BENZECRI	T	Statistiques
	ROCH	T	Géologie		COMOLET		Mécanique des fluides		VINH MAU		Physique M.G.P.
	SCHATZMANN	T	Astrophysique		DELLOUE	T	Physique de l'exosphère		DUQUESNES		Physique CPEM
	TERMIER	T	Géologie générale		HOUILLON		Biologie animale CPEM		SCHUTZENBERGER		Programmation
	ZAMANSKY	T	Mathématiques générales		OLIVIER		Anthropologie		TREMILLON		Chimie MPC
	LENNUIER	T	Physique M.G.P.		SAMUEL	T	Mathématiques (ENS Jeunes filles)		FAYARD		Chimie MPC
	ROUTHIER	T	Géologie appliquée		THIRY	T	Mécanique céleste		BUVET		Chimie CPEM
Mme	TONNELAT	T	Physique théorique		ABELES	T	Physique SPCN		AUTHIER		Physique MPC
MM.	DIXMIER	T	Mathématiques M.P.C.		AMAT	T	Thermodynamique		PICINBONO	T	Physique CPEM
	SOUCHAY	T	Chimie générale		AUBOIN	T	Géologie		BONNEFILLE		Electrotechnique
	AIGRAIN	T	Electrotechnique	Mme	BENOIT-GUEUTAL	T	Physique nucléaire & radio-activité	Mme	PUISEUX DAO		Biologie végétale
	BRUSSET	T	Chimie systématique	M.	BOUGIS		Biologie végétale marine Villefranche s/Mer				

UNIVERSITÉ DE PARIS - FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

Professeurs

MM.	MANGENOT G.	T	Biologie végétale	MM.	BERGERARD J.	T	Zoologie	Mme	MARTY N.		Physique propédeutique
	JACQUINOT P.	T	Optique		ROGER J.	T	Paléontologie	MM.	GOURDIN M.		Physique théorique
	GUINIER A.	T	Electricité & physique des solides		LEFORT M.	T	Chimie nucléaire		PEREZ-Y-JORBA		Physique propédeutique
	GRIVET P.	T	Electronique		LAGARRIGUE A.	T	Physique des hautes énergies		GORENFLOT E.		Biologie végétale SPCN
	BLANC-LAPIERRE A.	T	Accélérateur linéaire		JULLIEN J.	T	Chimie structurale organique		RIOU M.		Physique nucléaire
					ARNULF A.	T	Optique		BROUSSE R.		Géologie S.P.C.N.
	L'HERITIER P.	T	Génétique des virus		ROUAULT M.	T	Diffraction électronique		LIORET C.		Physiologie végétale
	LEMEE G.	T	Ecologie végétale		MARECHAL A.	T	Optique théorique et appliquée		CLAUSER H.		Chimie biologique
	MOYSE A.	T	Physiologie végétale		MAZET R.	T	Mécanique générale		JANCOVICI B.		Physique atomique
	DODE M.	T	Chimie thermodynamique		DAVID Serge	T	Chimie agrégation		LURCAT J.		Physique propédeutique
	DENY J.	T	Mathématiques		GUERIN H.	T	Chimie des gaz et des combustibles		LE BERRE J.		Entomologie
	RIVIERE A.	T	Géologie générale & sédimentologie		LESIEUR L.	T	Mathématiques MPC et algèbre		LAVOREL J.		Biophysique
	MICHEL A.	T	Chimie minérale		KOURGANOFF	T	Astronomie		PERIO P.		Physique propédeutique
	MAY R.	T	Anatomie comparée		ARNOULT P.	T	Physique électronique		FETIZON M.		Stéréochimie
	DELANGE H.	T	Mathématiques		KAHANE J.P.	T	Mathématiques		CHEMLA M.		Chimie des isotopes
	CHAPELLE J.	T	Physique expérimentale		BROCHARD J.	T	Physique propédeutique		MAZIERES C.		Chimie SPCN
	LACOMBE P.	T	Métallurgie	Mme	ROIZEN	T	Physique C.P.E.M.		VILKAS M.		Chimie C.P.E.M.
	BENOIT P.	T	Physiologie générale	MM.	BERTEIN F.	T	Electronique		BLANDIN A.		Physique des solides
	GUINOCHET J.	T	Biologie végétale SPCN		MALGRANGE B.	T	Mathématiques		BRUN G.		Génétique
	NERON A.	T	Mathématiques		CORABOEUF E.	T	Physiologie animale		MERCOUROFF		Physique agrégation
	NOZERAN R.	T	Botanique approfondie		FRIEDEL J.	T	Physique des solides		ANDRE J.		Microscopie électronique
	CASTAING R.	T	Thermodynamique		CHEVAUGEON J.	T	Cryptogamie		CHEVALLIER F.		Physiologie animale
	ELLENBERGER F.	T	Géologie structurale		MEYER P.	T	Physique théorique & atomique	Mlle	MARCOU		Biologie cellulaire C.P.E.M.
	LEDERER E.	T	Chimie biologique		LEHMANN P.	T	Accélérateur linéaire	MM.	BOURDU R.		Physiologie végétale
	RIZET J.	T	Génétique		CHABBAL R.	T	Physique propédeutique		BERKALOFF A.		Biologie animale CPEM
	LENDER T.	T	Biologie animale SPCN		DELCROIX J.M.	T	Physique des plasmas	Mlle	LEFORT M.		Biologie cellulaire CPEM
	POITOU G.	T	Mathématiques		CERF J.	T	Mathématiques	Mme	LAMBERT		Physique C.P.E.M.
	FREON P.	T	Chimie organique		D'ESPAGNAT B.	T	Physique théorique	MM.	BIZOT J.C.		Physique M.P.C.
	TONNELAT	T	Biologie physico-chimique		SCHAEFFER P.	T	Microbiologie		GUIRAUD J.P.		Mécanique
	BRUNN Jan	T	Géologie historique		DE GENNES P.	T	Physique des solides		LABOUESSE B.		Chimie SPCN
	JEAN M.	T	Physique nucléaire								

A Mon Père,

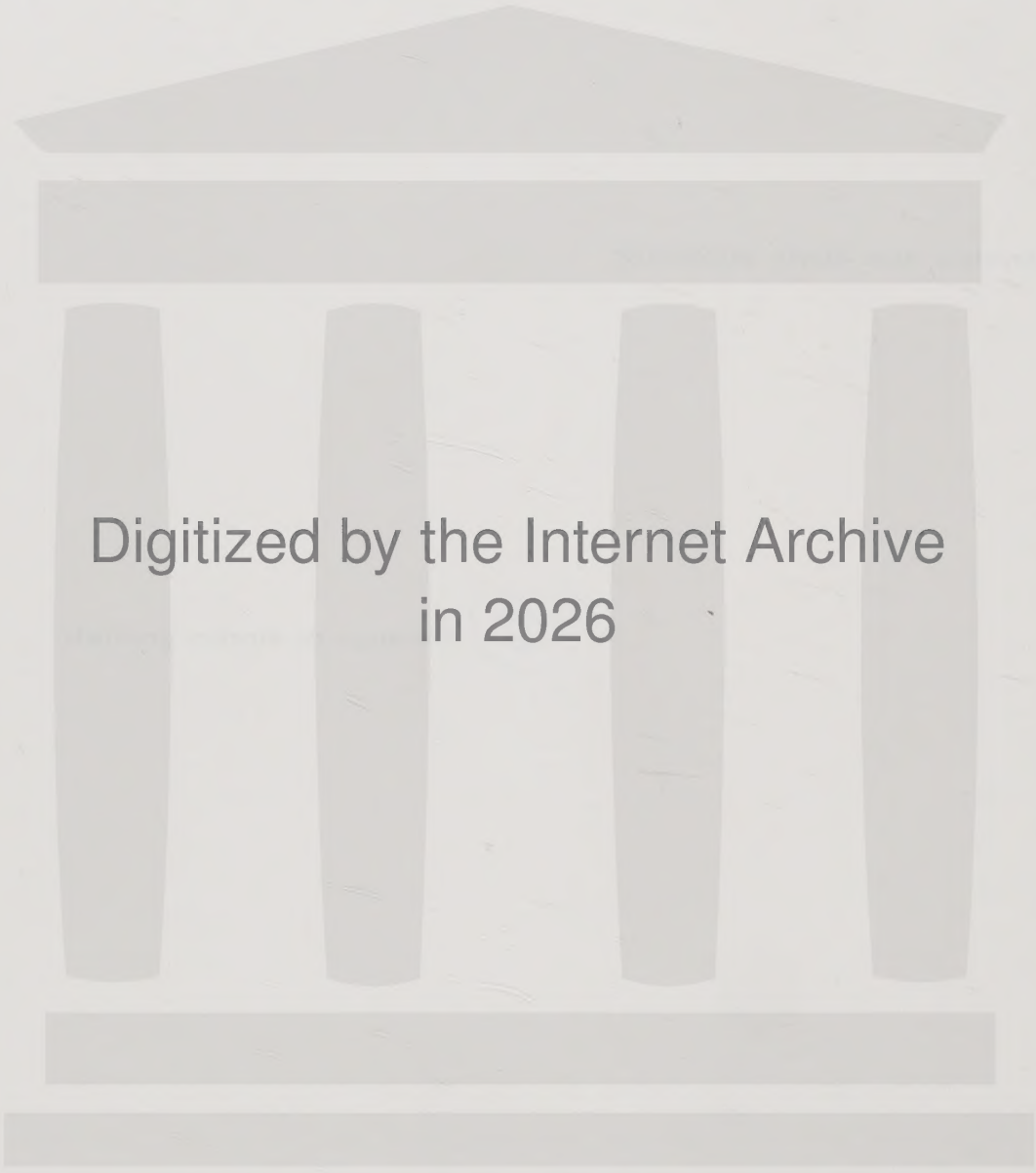
A Ma Mère,

Témoignage de profonde affection

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A Monsieur Jean-Marie BOISSERIE,

Hommage de sincère gratitude


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546604_0085

Sommaire

Pages

CHAPITRE I - HISTORIQUE ET INTRODUCTION 8

CHAPITRE II - GÉNÉRALITÉS SUR LE CALCUL D'UN BARRAGE - VOÛTE 11

II.1 - Exemple d'une poutre 12

II.1.1 - Cas d'une plaque 13

II.2 - Cas d'une coque 13

II.3 - Cas d'un barrage-voûte 16

II.3.1 - Calcul par ajustements 17

CHAPITRE III - CHAMP AJUSTANT 18

III.1 - Méthode de Résal 18

III.2 - Trial Load classique (U.S.B.R.) 19

III.3 - Détermination du champ ajustant par résolution d'un système d'équation linéaire 22

III.3.1 - Méthode de Tonini 22

III.3.2 - Méthode de Beaujoint 22

III.4 - Méthode proposée 25

CHAPITRE IV - COEFFICIENTS D'INFLUENCE 29

IV.1 - Description des coefficients d'influence directe 29

IV.1.1 - Coefficients d'influence directe des consoles 29

IV.1.2 - Coefficients d'influence directe des arcs 30

IV.2 - Charges associées aux calculs des coefficients d'influence 30

IV.3 - Technique de calcul 32

IV.3.1 - Conventions 32

IV.3.2 - Matrices de changement d'axes 33

IV.3.3 - Changement d'axes complets, transport des efforts et des déplacements 34

IV.3.4 - Traduction en machine 35

Pages

CHAPITRE V - CALCUL DES COEFFICIENTS COMPLETS. EFFET DE POISSON ALGORITHME DE L'ENTRAÎNEMENT 38

V.1 - Coefficients d'influence complets des arcs "Calcul ALPHA"..... 38

V.2 - Coefficients d'influence complets des consoles "Calcul BETA"..... 38

V.3 - L'algorithme de l'entraînement 40

V.3.1 - Calcul "ALPHA" complet 41
V.3.2 - Calcul "BETA" complet 41

CHAPITRE VI - LES COEFFICIENTS DE LA MATRICE PRINCIPALE ET LE SECOND MEMBRE DU SYSTÈME LINÉAIRE 42

VI.1 - Coefficients de la matrice principale..... 42

VI.2 - Second membre du système linéaire 42

VI.3 - Calcul des efforts et déplacements..... 43

VI.3.1 - Consoles prises indépendantes..... 43
VI.3.2 - Arcs pris indépendants..... 43
VI.3.3 - Arcs avant ajustement 44
VI.3.4 - Consoles avant ajustement..... 44
VI.3.5 - Calcul du second membre..... 45

CHAPITRE VII - DÉFORMATION DE FONDATION ET D'APPUI..... 46

VII.1 - Déformation de la surface de fondation 46

VII.1.1 - Notations..... 46

VII.2 - Equations de déformations 47

VII.3 - Coefficients de "Vogt"..... 51

VII.4 - Traduction en machine..... 51

VII.5 - Introduction de la formulation matricielle..... 51

VII.5.1 - Matrice de déformabilité de la fondation..... 51
VII.5.2 - Termes complémentaires..... 52

VII.6 - Déformabilité de l'élément unitaire..... 55

CHAPITRE VIII - RÉSULTATS 56

VIII.1 - Qualité des solutions obtenues..... 56

VIII.2 - Optimalisation du nombre d'ajustements..... 57

VIII.3 - Comparaison avec un modèle..... 58

VIII.4 - Fondation plus déformable 70

VIII.5 - Effet de Poisson et chargement aux appuis..... 70

Pages

CONCLUSIONS 73

BIBLIOGRAPHIE CITÉE 74

ANNEXES

Annexe 1 - Théorie des coques d'épaisseur moyenne ; Géométrie, Equations d'équilibre 76

Annexe 2 - Invariance d'un calcul d'ajustement par répartition préliminaire des charges extérieures..... 84

Avant-propos

Le travail présenté dans cette thèse entre dans le cadre des études conduites au département Mécanique Théorique du Service des Etudes et Recherches Nucléaires, Thermiques et Hydrauliques de l'Electricité de France à Chatou. Nous remercions la Direction des Etudes et Recherches à l'Electricité de France qui nous a permis de conduire cette étude dans ses Laboratoires.

Nous exprimons notre profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur R. SIESTRUNCK qui a bien voulu nous guider dans la préparation de cette thèse et pour le grand honneur qu'il nous fait de présider la commission d'examen.

Nous remercions vivement Monsieur le Professeur R. VICHNIEWSKY, Monsieur P. CASEAU, Chef du département Mécanique Théorique et Monsieur J.M. BOISSERIE d'avoir bien voulu accepter de faire partie de notre jury.

Nous tenons à présenter nos respectueux remerciements à Messieurs J.M. BOISSERIE et C. BENJAMIN, ingénieurs chercheurs du département Mécanique Théorique qui ont été l'un et l'autre l'âme de cette étude ; leur expérience technique et leur esprit de recherche ont permis de mener à bien ce travail.

Nos remerciements vont également à Mademoiselle P. LE BOURG, ingénieur du Département Mécanique Théorique et à Madame A. ROY, dessinatrice du même département, dont la collaboration nous a été très précieuse.

Chapitre I

Historique et introduction

Un barrage-voûte, ouvrage prenant appui sur les flancs d'une vallée rocheuse, apparaît comme une plaque cintrée, d'épaisseur faible et souvent à double courbure, encastrée le long de sa surface d'appui, qui reporte la majeure partie de la poussée sur les ancrages latéraux.

L'origine des barrages-voûtes est assez lointaine et, comme le précise M. Mary, il semble que le plus ancien connu à ce jour, qui est actuellement vide, se trouve en Iran près de la ville de Koum, à 50 kilomètres au sud de Téhéran, et qu'il date probablement du XIIIème siècle.

Ensuite, les grands exemples historiques se rencontrent à peu près à un siècle d'intervalle en Espagne et en Italie [15].

En Espagne, on trouve les barrages d'Almanzo et Elche (XVIème siècle). Puis les Italiens ont construit le barrage de Pontalto (1611), surélevé plusieurs fois par la suite.

En France, il semble que ce soit l'ingénieur Zola, père du grand romancier Emile Zola, qui ait projeté les premiers barrages-voûtes. En fait, la réalisation d'un seul de ses deux projets eut lieu. C'était un barrage de 36 mètres de haut en Aix-en-Provence, appelé barrage de Zola (1843).

D'après Coyne, Zola eut le mérite de hardiment compter l'effet de voûte dans ses projets. Il insista sur la sécurité augmentée de l'ouvrage et sur l'importance de la résistance des rives.

C'est en Californie, à la fin du siècle dernier, qu'apparaissent de nombreux ouvrages du type voûte construits par les pionniers américains. Parmi leurs réalisateurs, Jorgensen est souvent cité pour avoir projeté des ouvrages d'ouverture constante.

On peut voir là l'influence de la méthode du calcul et du schéma physique qu'elle traduit. En effet, le concept de voûte d'ouverture constante est tout naturellement apparu à la suite des calculs en "arcs indépendants".

Les barrages de Bear-Valley (1884) et Upper-Otay (vers 1890) sont les plus anciens de ce type.

En France, Résal publiant en 1919 son mémoire intitulé : "Formes et dimensions des grands barrages en maçonnerie" s'est trouvé être plutôt un précurseur en matière de calcul. En effet, écrit-il, sa méthode, celle des "arcs-murs", permettra d'éviter la défectuosité du profil de clé de l'ouvrage américain de Shoshone (sur la Snake River en 1910).

Il s'agit là sans doute du premier exposé du principe d'un calcul de barrage basé sur l'ajustement des déplacements d'un double système d'arcs et de consoles ; mais seul le déplacement radial de l'ensemble des arcs et d'une console centrale est ajusté.

Il semble que le premier grand barrage-voûte français soit dû à Coyne : c'était le barrage de Marèges (1938). En tout cas, c'est à ce dernier que l'on doit les projets non seulement de la plupart des voûtes, mais en fait de la plupart des grands barrages français.

L'exposition de quelques réflexions sur les barrages-voûtes, dues à Coyne, prend dans cette situation une valeur particulière [15].

L'idée fondamentale de ce dernier en ce qui concerne les critères de base est l'utilisation de la formule simple dite formule du tube :

$$\text{Contrainte moyenne} = \text{Pression maximale de l'eau} \times \frac{\text{Rayon}}{\text{Epaisseur}}$$

Voilà comment Coyne résume la situation :

"Partie, il y a quelque vingt ans, de 25 à 30 kg/cm^2, la contrainte moyenne calculée par la formule du tube, pour les grands prototypes : Pacoima, Diablo Dam, Ariel Dam, Marèges, Santa Luzia, s'élève aujourd'hui couramment à 50, 60, 70 kg/cm^2 en : Rossens, Val Gallina, Tignes, Salamonde, La Palisse, Malpasset, etc...

Exceptionnellement, nous avons même dépassé 100 kg/cm^2 pour le barrage de Gage.

Parallèlement à l'accroissement des contraintes moyennes théoriques, les contraintes effectives de compression sont passées de 30 à 40 kg/cm^2 (Marèges) à 60, 70 (Salamonde) et même 110 à 120 kg/cm^2 au Gage".

Coyne donne sur les calculs objets de cette thèse un avis :

"Les calculs d'un barrage-voûte sont difficiles pour la raison même pourquoi il résiste si bien à des sollicitations extrêmement variées, à savoir son haut degré d'hyperstatisme, qui lui permet de parer aussi bien à une défaillance imprévue de la fondation qu'à une insuffisance de dimensionnement.

Il semble, d'après les confrontations antérieures des contraintes calculées aux contraintes mesurées, qu'il faille aller assez loin dans le calcul pour commencer à approcher de la réalité et que cette dernière ne se laisse pas facilement saisir, surtout en ce qui concerne les effets thermiques, ni facilement prévoir en ce qui concerne les réactions du sol".

Le travail que nous présentons est essentiellement basé sur la traduction en machine d'une formulation dite "Calcul par ajustement" qui évite de résoudre directement les équations aux dérivées partielles du problème.

Cette approche est analogue à la très célèbre méthode dite de "Trial Load".

La principale originalité de ce travail est le recours systématique à la formulation matricielle, qui permet de condenser considérablement les formules de changement d'axes tridimensionnels.

En effet, les calculateurs utilisant des machines de bureau pour un Trial Load traditionnel ou un programme de calcul automatique, calculent en général arcs et consoles en leur donnant un caractère de poutres planes comme dans la résistance des matériaux, afin de simplifier les formules de changement d'axes.

Une formulation matricielle a des conséquences qui dépassent une simple commodité formelle.

Elle permet, en utilisant de façon complète le système d'axes de Love-Kirchhoff, de réduire l'écart entre une théorie des coques satisfaisante pour l'esprit, mais d'un maniement complexe et une méthode de calcul efficace, mais semblant avoir oublié ses origines.

La mise au point d'un programme de calcul sur IBM 7094 a donc constitué la plus grande partie du travail.

Par ses cent sous-programmes, par l'utilisation de 5 bandes démontables et de 4 unités de bandes banales non démontables, par l'utilisation du tambour et des disques magnétiques en accès aléatoire, ce programme représente un petit "code" dont le temps d'exécution est dans des cas moyens de 25 minutes sur IBM 7094. Ce temps peut facilement être multiplié par deux si le découpage et le nombre d'ajustements réalisé augmente.

Ce programme s'est développé parallèlement à un code à possibilités plus étendues, celles de tenir compte de l'effet de Poisson et de l'effet de l'entraînement. Il a permis de fournir à toutes les phases de l'exécution les chiffres de contrôle nécessaires.

Dans l'état actuel, ce programme est donc complètement vérifié au point de vue formel.

Au point de vue numérique, il a été testé jusqu'à six ajustements avec une géométrie de 7 arcs et 11 consoles associé à un système de 282 équations linéaires.

Les résultats numériques que nous présentons servent à illustrer les possibilités de ce code. Ils sont relatifs :

- à la comparaison avec un modèle, par des calculs à nombre d'ajustements différents ;
- à l'étude d'effets qui ne sont pas commodes à étudier sur un modèle, à savoir :
  - hétérogénéité de l'ouvrage,
  - hétérogénéité de la fondation.

Chapitre II

Généralités sur le calcul d'un barrage-voûte

Du point de vue de la physique mathématique, le calcul des barrages-voûtes est réductible à un problème de minimalisation énergétique avec des conditions aux limites très générales portant sur un contour curviligne. Ceci conduit à la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles du quatrième ordre dont l'inconnue est le vecteur déplacement et à des conditions aux limites du second ordre [17].

Les coefficients de ce système d'équations sont des fonctions de point, puisque l'épaisseur de la voûte est variable.

A notre connaissance, le problème n'a jamais été résolu sous cette forme pure. Les ingénieurs ont donc été conduits, et cela généralement sans avoir recours à la théorie des coques, à mettre au point des méthodes approchées de solution, dérivées de la théorie des poutres.

Dans ce travail, nous avons recours à une présentation énergétique du problème en liaison avec la théorie des coques de Love.

Cela nécessite un bref rappel de calcul des variations. Cette façon de procéder est naturelle lorsque nous pouvons connaître en tout point la densité de l'énergie élastique, c'est-à-dire du travail accumulé dans le milieu résistant sous l'effet des charges extérieures.

Cette énergie a une expression différentielle simple lorsqu'elle est exprimée dans les axes locaux. L'intégration dans tout le domaine résistant de cette différentielle aboutit à une expression de la forme générale suivante :

a) pour un milieu décrit par une seule variable x et un déplacement élastique décrit par une seule fonction y, l'énergie est sous la forme :

$$V = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)})\, dx \qquad (II,1)$$

nous nous limitons à n = 2.

L'équation "d'Euler" de cette fonctionnelle d'énergie est de la forme :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} = 0 \qquad (II,2)$$

b) pour un milieu décrit par deux variables x, y et un déplacement décrit par une seule fonction u, l'énergie devient, avec des notations condensées,

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}, \ \ldots :$$

$$V = \iint_D F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})\, dx\, dy \qquad (II,3)$$

dans ce cas, l'équation d'Euler est :

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{xy}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{yy}}\right) = 0 \qquad (II,4)$$

c) enfin, pour un milieu décrit par trois variables x, y, z et une fonction u de déplacement, l'énergie du système est :

$$V = \iiint_{(D)} F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{xy}, u_{yz}, u_{zx})\, dx\, dy\, dz \qquad (II,5)$$

et l'équation d'Euler correspondante :

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial u_z}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{yy}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{zz}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{xy}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{yz}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{zx}}\right) = 0 \qquad (II,6)$$

Si nous voulons exprimer les équations différentielles satisfaites par les fonctions déplacement dans l'état d'équilibre du milieu, nous faisons donc application d'une idée très générale exprimée par J.L. Lagrange :

> "Si un système de corps ou de particules, réagissant mutuellement par des forces arbitraires, est en équilibre, et si on donne à ce système un petit mouvement arbitraire en vertu duquel chaque particule est translatée d'une quantité infiniment petite, alors la somme des produits des forces multipliés par les distances parcourues par la particule correspondante sera toujours égale à zéro, si on regarde les distances parcourues dans la direction des forces comme positives et celles parcourues en sens contraires comme négatives".

Le calcul des variations nous permet de trouver la condition de nullité de l'énergie mise en jeu au cours d'un "petit mouvement arbitraire" au voisinage de la position d'équilibre.

II.1 - EXEMPLE D'UNE POUTRE

La théorie de Navier dans son domaine d'application, c'est-à-dire celui des poutres élancées constituées par un matériau isotrope et linéaire et déformées sans altération de la planéité des sections, permet de définir l'énergie du système élastique.

Considérons une poutre élastique avec des appuis quelconques, ayant une inertie I(x), un module d'Young E(x). Elle est soumise à une densité de charge p(x) perpendiculaire à sa fibre moyenne et le déplacement y(x) est colinéaire au chargement.

L'énergie potentielle du système ainsi constitué est connue :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2} E\, I\, y''^2 - p\, y\right) dx$$

ce qui donne par le calcul des variations l'équation d'Euler suivante :

$$(E\, I\, y'')'' - p = 0$$

Il convient de remarquer qu'en tenant compte de la relation effort-déplacement d'une poutre :

$$M = E\ I\ y''$$

l'énergie peut se mettre sous la forme mixte :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2} M y'' - p y\right) dx \qquad (II,7)$$

La condition de minimum de cette énergie nous conduit à l'équation d'Euler suivante :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - p = 0 \qquad (II,7a)$$

ce qui est tout simplement l'équation d'équilibre en fonction des efforts. Ce procédé, qui n'est pas très avantageux pour les poutres, présente un certain intérêt pour les plaques et les coques.

II.1.1 - Cas d'une plaque

Pour une plaque d'épaisseur h, de module E et de coefficient de Poisson ν, la rigidité à la flexion est :

$$D = \frac{E\ h^3}{12\ (1 - \nu^2)}$$

L'énergie de flexion de cette plaque en terme de déplacement est (*)

$$V_f = \frac{1}{2} D \iint \left[(u_{xx} + u_{yy})^2 - 2(1 - \nu)\ (u_{xx}\ u_{yy} - u_{xy}^2)\right] dx\ dy \qquad (II,8)$$

l'expression $K = u_{xx}\ u_{yy} - u_{xy}^2$ est une approximation de la courbure gaussienne (voir Annexe 1) de la surface moyenne déformée, la partie correspondante de l'équation d'Euler est nulle.

L'équation d'Euler est donc :

$$\nabla^2\ \nabla^2 u = 0 \qquad (II,8a)$$

Pour obtenir les équations d'équilibre en fonction des efforts, il faudrait partir de l'expression mixte de l'énergie.

II.2 - CAS D'UNE COQUE

"La fonction d'énergie de déformation étant connue, nous pouvons appliquer la méthode générale donnée dans "la Mécanique analytique", et qui apparaît être plus spécialement applicable aux problèmes composés d'un nombre immense de particules agissant mutuellement les unes sur les autres. Un des avantages de cette méthode de grande importance est que nous sommes nécessairement conduits par un simple procédé de calcul et avec peu de soins de notre part aux équations du problème".

(*) u désigne le déplacement perpendiculaire au plan de la plaque.

Cette citation de G. Green résume l'intérêt de l'application du calcul des variations au milieu continu.

Dans le cas d'une coque, la théorie de Love-Kirchhoff est l'homologue de celle de Navier pour les poutres.

Nous donnons en Annexe 1 un résumé de cette théorie, les expressions de l'énergie du système en fonction des efforts et en fonction des déplacements et sous la forme mixte, ainsi que la marche à suivre pour obtenir les équations d'équilibre. Nous donnons également les relations efforts-déplacements.

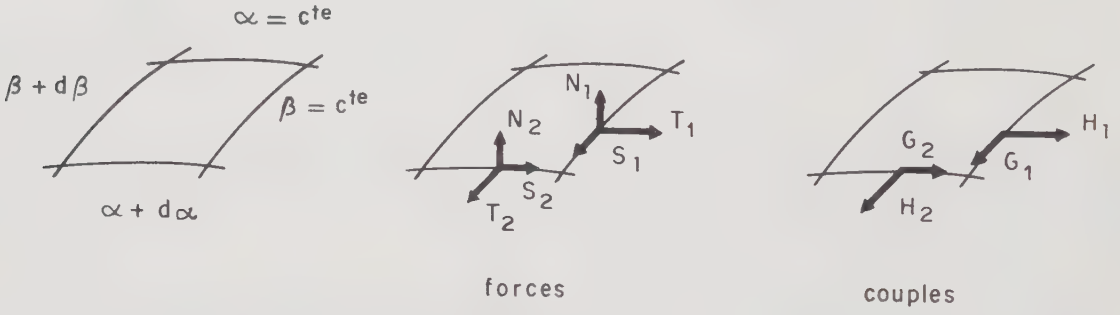


Figure II.1

Cette théorie permet de déterminer une densité locale d'énergie dont l'expression est (*) :

$$W = \frac{1}{E}\left[\frac{1}{e}\left(T_1^2 + T_2^2 - 2\nu\, T_1\, T_2 - 2(1+\nu)\, S_1\, S_2\right) + \frac{12}{e^3}\left(G_1^2 + G_2^2 - 2\nu\, G_1\, G_2 - 2(1+\nu)\, H_1 H_2\right)\right] \quad (II,9)$$

avec les notations de Love :

$T_1\, d\alpha$	$T_2\, d\beta$	...	Forces normales
$S_1\, d\alpha$	$S_2\, d\beta$	...	Forces correspondant à des efforts tranchants
$N_1\, d\alpha$	$N_2\, d\beta$		
$G_1\, d\alpha$	$G_2\, d\beta$	...	Couples de flexion
$H_1\, d\alpha$	$H_2\, d\beta$	...	Couples de torsion

Il est habituel de distinguer :

a) les termes de *membrane*

- directs :

$$\frac{1}{Ee}\left[T_1^2 + T_2^2 - 2(1+\nu)\, S_1\, S_2\right]$$

- indirects, dûs à l'effet de couplage *"effet de Poisson"* (**) :

$$\frac{1}{Ee}\left[-2\nu\, T_1\, T_2\right]$$

(*) Voir Annexe 1 ; il convient de remarquer l'absence de N_1 et de N_2 dans l'expression de l'énergie qui résulte de la préservation de l'élément normal.

(**) Il convient de remarquer que pour le calcul d'un barrage-voûte, l'effet de couplage est appelé "effet de Poisson".

b) les termes de *dalle*

- directs :

$$\frac{12}{Ee^3}\left[G_1^2 + G_2^2 - 2(1+\nu)\, H_1\, H_2\right]$$

- indirects, dûs à l'effet de Poisson :

$$\frac{12}{Ee^3}\left[-2\nu\; G_1\, G_2\right]$$

Gol'denvizer [17] donne un développement complet des équations d'équilibre des coques en fonction des déplacements. Dans le cas du barrage-voûte, on trouve également ces équations dans la référence [18].

En principe, il est possible de les obtenir par le calcul des variations. Cela aurait l'avantage d'associer de façon plus nette chaque terme de l'équation différentielle à un des termes de la fonctionnelle de l'énergie et ainsi de présenter plus clairement les différentes simplifications traditionnellement employées. On trouve dans la référence [21] un exposé très clair sur ce dernier point. En effet, il y a trois étapes de simplification :

a) des simplifications nécessaires des équations générales des coques en les écrivant dans le cas simplifié d'une surface moyenne cylindrique sans que l'épaisseur soit supposée constante ;

b) une deuxième étape de simplification consiste à négliger l'effet de Poisson, ce qui suppose que le barrage est mince. On le justifie également par le fait que le coefficient de Poisson du béton est relativement petit (moins de 1/6) ;

c) l'annulation des composantes du déplacement situées dans le plan moyen de la coque est la troisième étape.

Le système d'équations résultant est donc suffisamment simple pour permettre une intégration numérique dans le cas d'un contour de fondation parabolique.

Allen [1] n'écrit pas les équations de coque dans le système de coordonnées (α, β), mais dans le système d'axes général cylindrique (r, θ, z) en gardant une épaisseur constante, hypothèse peu satisfaisante pour les besoins d'ingénieur.

Afin d'arriver à la solution sans négliger les termes de l'énergie, nous évitons de poser les équations d'Euler et nous utilisons *directement* la fonctionnelle de l'énergie, puisque l'équation d'Euler correspondante n'est pas utilisable simplement.

Nous reprenons ainsi une méthode de discrétisation par éléments élancés finis et en exprimant que les relations d'équilibre et de compatibilité sont assurées pour des systèmes partiels capables d'emmagasiner l'énergie de coque qui leur est impartie.

Précisons ce point :

En effet, nous décomposons l'énergie de la coque en deux parties dont chacune ne contient que les efforts relatifs aux éléments élancés α = Cte ou ceux relatifs aux éléments β = Cte.

Ce partage, qui n'est pas absolument rigoureux, est obtenu en tenant compte des relations :

$$S_1 + S_2 = 0 \qquad H_1 + H_2 = 0 \tag{II,10}$$

égalités qui ne sont vraies qu'au premier ordre.

- Energie de l'élément élancé à α = Cte :

$$W_1 = \frac{1}{E}\left[\frac{1}{e}\left(T_1^2 + (1+\nu)\,S_1^2\right) + \frac{12}{e^3}\left(G_1^2 + (1+\nu)\,H_1^2\right)\right] \qquad (II,11)$$

- Energie de l'élément élancé à β = Cte :

$$W_2 = \frac{1}{E}\left[\frac{1}{e}\left(T_2^2 + (1+\nu)\,S_2^2\right) + \frac{12}{e^3}\left(G_2^2 + (1+\nu)\,H_2^2\right)\right] \qquad (II,12)$$

La charge extérieure $\vec{P}(\alpha, \beta)$ peut donc être envisagée comme partagée selon $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ supportées respectivement par des éléments α = Cte et β = Cte :

$$\overrightarrow{P}(\alpha, \beta) = \overrightarrow{P_1}(\alpha, \beta) + \overrightarrow{P_2}(\alpha, \beta) \qquad (II,13)$$

Exprimer la compatibilité revient à la détermination de la valeur réelle de $\overrightarrow{P_1}(\alpha, \beta)$ et de $\overrightarrow{P_2}(\alpha, \beta)$, qui rendent égaux les déplacements au point d'intersection de deux éléments.

Pour cela, nous faisons un chargement arbitraire $\overrightarrow{\overline{P_1}}(\alpha, \beta)$ et de $\overrightarrow{\overline{P_2}}(\alpha, \beta)$ dont la somme reconstitue la charge extérieure $\vec{P}(\alpha, \beta)$.

Il suffit donc de trouver une fonction de point $\vec{R}(\alpha, \beta)$ qui soit telle que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\overline{P_1}}(\alpha, \beta) - \vec{R}(\alpha, \beta) &= \overrightarrow{P_1}(\alpha, \beta) \\ \overrightarrow{\overline{P_2}}(\alpha, \beta) + \vec{R}(\alpha, \beta) &= \overrightarrow{P_2}(\alpha, \beta) \end{aligned} \qquad (II,14)$$

Ainsi les fonctions $\vec{R}(\alpha, \beta)$ rendent égaux les déplacements des éléments élancés α = Cte et β = Cte et assurent ce que nous appelons *l'ajustement*. Le champ des fonctions $\vec{R}$ est appelé le *champ ajustant*.

II.3 - CAS D'UN BARRAGE-VOÛTE

Dans le cas d'un barrage-voûte, la méthode traditionnelle est le Trial Load Analysis (T.L.A.). Cette méthode ne fait pas appel à la théorie des coques, mais à celle des poutres par découpage de la voûte en deux ensembles des poutres croisées.

Dans ce présent travail, nous tentons de donner au T.L.A. une présentation énergétique basée sur la théorie des coques.

En effet, la voûte du barrage est assimilée à une coque moyenne. Les hypothèses suivantes sont adoptées :

- existence d'une surface moyenne décrite par des vecteurs $\overrightarrow{OM}(\alpha, \beta)$, fonction de deux variables ;
- isotropie et linéarité du matériau ;
- le module d'Young ne dépend que de α et β ;
- *hypothèse de préservation de l'élément normal*, un élément linéaire du matériau perpendiculaire à la surface moyenne dans l'état de référence reste droit et perpendiculaire à la surface dans tout état déformé.

II.3.1 - Calcul par ajustements

Les méthodes de calcul par ajustements ont une signification intuitive. En effet, l'ouvrage réel est analysé en séparant deux ensembles fictifs qui ne possèdent chacun qu'une partie des caractéristiques de l'ouvrage et qui ont en commun la fondation.

Le premier est constitué par l'empilement de tranches élémentaires horizontales d'épaisseur infiniment petite (éléments α = Cte). Chacune de ces tranches a le même caractère d'hyperstaticité qu'un arc encastré avec des appuis déformables. Là s'arrête l'analogie, parce que la largeur infiniment petite de cet élément, qui n'est qu'un élément différentiel de coque, le prive de certaines parts du comportement d'un arc poutre.

Cependant, l'habitude est restée d'appeler *arc* cet élément, et par conséquent nous appelons "ouvrage des arcs" le premier des ensembles fictifs, fondation comprise, et nous le désignons par [arc].

Le second est formé de la juxtaposition des tranches élémentaires sensiblement verticales, de largeur également infiniment petite (éléments β = Cte) ; assimilons-les à des *consoles* ; elles en ont le caractère isostatique mais, comme pour les arcs, il ne s'agit pas de véritables consoles, mais d'éléments différentiels de coque. Nous appelons "ouvrage des consoles" le second des ensembles fictifs, fondation comprise, et nous le désignons par [console].

Comme nous venons de le voir dans le cas d'une coque, nous devons trouver la part respective de la charge extérieure supportée par [arc] et [console] et donc déterminer les fonctions $\vec{R}(\alpha, \beta)$ que nous appelons "champ ajustant" (voir § II.2).

Ce partage une fois connu, l'état d'équilibre de l'ouvrage serait calculable comme il l'est pour [arc] et [console] pris séparément, puisque la linéarité de l'ensemble est admise.

Définissons ce que nous entendons par : élément pilote, nœud, voussoir.

Les ensembles d'éléments élancés qui constituent [arc] et [console] sont infinis. La discrétisation nécessite qu'on en choisisse un certain nombre. Ce sont les éléments pilotes.

Les éléments pilotes se coupent aux nœuds.

Chaque élément pilote est divisé en voussoirs, et enfin chaque voussoir est porteur de l'énergie de coque.

Chapitre III

Champ ajustant

La partie principale du calcul est la détermination du champ ajustant, c'est-à-dire d'une fonction des deux coordonnées décrivant la surface moyenne de l'ouvrage, ayant la propriété de rendre identiques les déplacements des arcs et des consoles lorsque ceux-ci le subissent, ainsi que la part de la charge extérieure qui leur a été imposée initialement.

Par la discrétisation imposée, il est impossible de faire de cette fonction un continu. Aussi doit-on l'approcher, ce qui est facilité par le caractère essentiellement linéaire du problème, qui rend licite l'application du théorème de superposition.

La relation fondamentale utilisée pour déterminer le partage de charges est la compatibilité, à savoir que les déplacements de [arc] et [console] sont égaux.

Précisons ce que nous entendons par déplacement. Il s'agit d'une fonction de point, mesurée dans les axes locaux, à caractère vectoriel.

III.1 - MÉTHODE DE RÉSAL

Voilà comment Résal pose le problème (*) :

"Nous admettons que le massif se présente sous la forme d'une voûte parabolique d'épaisseur constante e. On peut toutefois substituer, sans erreur sensible dans les résultats du calcul, le cercle à la parabole, tant que le rapport b/l de la flèche de construction à la corde ne dépasse pas 1/8. Le mur est d'épaisseur uniforme e, de hauteur h et de longueur l."

La voûte est soumise à une charge uniformément répartie de densité q, tandis que la densité de charge sur le mur est p. L'axe z est dirigé vers le bas, f est le déplacement radial.

La matière est parfaitement élastique.

Le déplacement élastique de clé est donné par la formule qui lie le déplacement en clé d'un arc parabolique et la pression q :

$$E f = \frac{(4,75)^3}{512} \cdot \frac{q l^4}{(b + e)^3} \qquad (III,1)$$

L'équation différentielle d'une poutre pour le déplacement du mur nous donne :

$$p = E I \frac{d^4 f}{dz^4} = \frac{E e^3}{12} \frac{d^4 f}{dz^4} \qquad (III,2)$$

En un point quelconque de l'ouvrage, la pression z (en t/m^2) qui s'exerce sur le parement amont, est équilibrée par la réaction p du mur et celle q de la voûte :

$$p + q = z \qquad (III,3)$$

(*) Voir [25]

Il suffit d'éliminer p et q entre ces 3 dernières équations pour trouver l'équation différentielle satisfaite par q, ce qui donne :

$$p = \frac{l^4}{4t^4} \frac{d^4q}{dz^4}$$

d'où :

$$q + \frac{l^4}{4t^4} \times \frac{d^4q}{dz^4} = z \qquad \text{(III,4)}$$

avec :

$$\frac{512 \times 12}{(4,75)^3} \times \frac{(b+e)^3}{l^3} = 4t^4$$

l'équation différentielle (III,4) s'intègre sans difficulté :

$$q = z + A\,\mathrm{Exp}\left(t\frac{z}{l}\right)\cos\left(t\frac{z}{l}\right) + B\,\mathrm{Exp}\left(t\frac{z}{l}\right)\sin\left(t\frac{z}{l}\right) + C\,\mathrm{Exp}\left(-t\frac{z}{l}\right)\cos\left(t\frac{z}{l}\right) + D\,\mathrm{Exp}\left(-t\frac{z}{l}\right)\sin\left(t\frac{z}{l}\right) \qquad \text{(III,5)}$$

Résal trouve donc la répartition des charges entre arcs et consoles comme solution d'une équation différentielle.

Les constantes A, B, C, D se calculent à partir des conditions aux limites, conditions d'effort au sommet de mur pour z = 0 et conditions de déplacement à l'encastrement du mur pour z = h.

III.1.1 - Remarque

Dans le langage actuel, nous disons que Résal a réalisé l'ajustement des déplacements radiaux sur la console de clé, ou simplement un ajustement ; cet ajustement est celui du déplacement radial de la console de clé.

III.2 - TRIAL LOAD CLASSIQUE

"United States Bureau of Reclamation"

Le Trial Load classique se propose de réaliser l'égalité d'un certain nombre de composantes du vecteur déplacement (fonction de point, à 6 composantes) convenablement choisies sur un système particulier [arc] et [console] [9 et 10].

De cette façon, par un T.L.A., on réalise :

- soit l'ajustement des composantes horizonto-radiales (*) (ajustement radial) du déplacement de la console de clé, ou de tous les points de la voûte ;

- soit l'ajustement des 3 composantes suivantes :

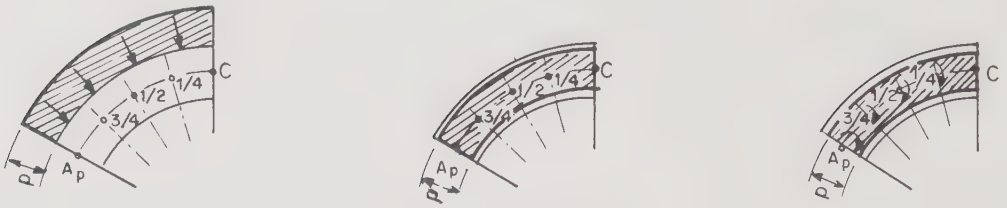
  a) translation horizonto-radiale,

(*) La composante radiale est prise sensiblement parallèle à la direction de la pression de l'eau.

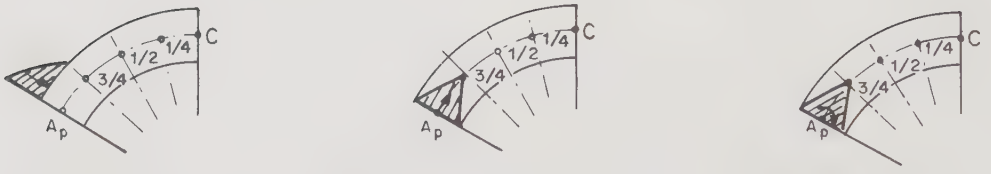
a- CHARGE RADIALE

b- CHARGE TANGENTIELLE

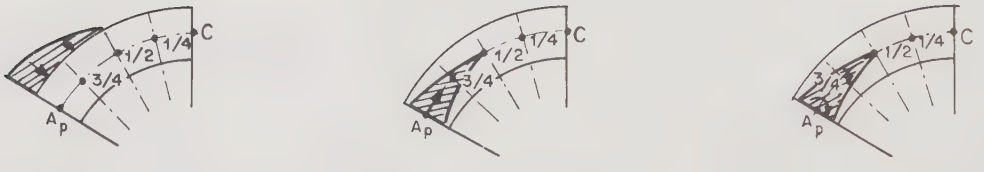
c- COUPLE D'AXE VERTICAL



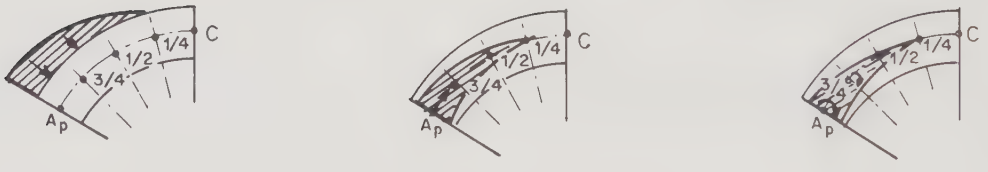
Charge type n° 1



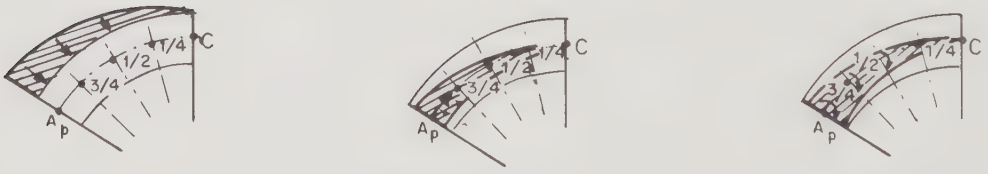
Charge type n° 2



Charge type n° 3



Charge type n° 4



Charge type n° 5

Charge concentrée

Figure III, 1 : Charge type de l'arc (U.S.B.R.)

b) translation horizonto-tangentielle,

c) rotation d'axe vertical.

L'ensemble [arc] est constitué par des éléments horizontaux à section équivalente, c'est-à-dire que la section réelle qui est sensiblement un parallélogramme est remplacée par un rectangle.

Les éléments élancés de [console] ont des sections situées dans les plans horizontaux [12].

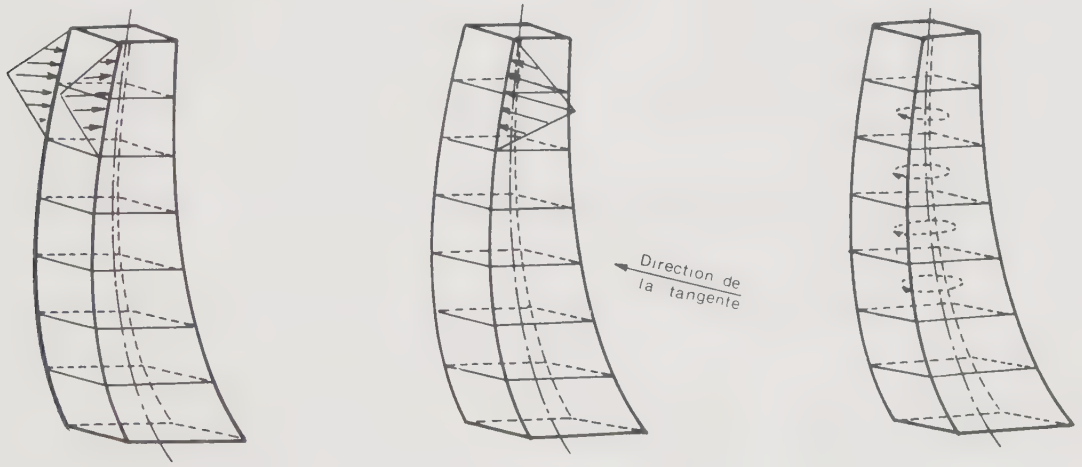
La détermination du champ ajustant est réalisée *par tâtonnements*. L'influence de chaque terme du champ ajustant variable avec son emplacement et son type est calculée à l'aide des tables et plus récemment avec des machines à calculer électroniques.

Le champ ajustant est supposé pouvoir être décrit par superposition de charges unitaires variant linéairement entre les nœuds. Ces charges unitaires sont parfois appelées "charges-types".

Les charges-types d'arcs et de consoles sont données dans la figure (III, 1) et (III,2).

L'expérience des calculateurs du "Bureau of Reclamation" est telle que la recherche d'une solution ne prend que quelques semaines.

Le Bureau of Reclamation prévoit une seconde famille de charges types qui est formée de charges concentrées aux fondations, ce qui permet de réaliser les ajustements sur les appuis (fig. III, 1).



a) Charge radiale b) Charge tangentielle c) Couple d'axe vertical

Figure III, 2 : Charge type de la console (U.S.B.R.)

La marche du calcul est la suivante :

La pression de l'eau est appliquée aux arcs. Le déplacement des arcs est calculé. Ce déplacement est une majorante de celui du barrage complet.

On applique des charges positives sur les consoles qui soulagent les arcs. Ceci est réalisé de proche en proche en examinant à chaque étape l'état de déformation complet des arcs et des consoles.

III.3 - DÉTERMINATION DU CHAMP AJUSTANT PAR RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

La méthode de résolution par tâtonnements est remplacée par celle qui consiste à résoudre un système d'équations linéaires comportant de 50 à 300 équations.

Les ordinateurs électroniques sont utilisés pour poser le système et pour le résoudre. Mais les profils de charges types utilisées par le Bureau of Reclamation ne se prêtent pas facilement à la pose du système d'équations. En effet, si on ne les modifie pas, il faut écrire en chaque nœud deux groupes d'équations :

a) celui d'égalité des p composantes du déplacement en question. En effet, toutes les charges de la console J et de l'arc I contribuent à faire varier le déplacement relatif au nœud considéré comme appartenant à l'arc et du nœud comme appartenant à la console ;

b) celui d'équilibre des p composantes de la charge.

L'ordre du système d'équations pour n nœuds et p composantes d'ajustement est 2 n p.

Or, la taille des ordinateurs -en fait celle des mémoires à accès rapide- limite de façon précise l'ordre des systèmes solubles. Par exemple, avec la machine dont nous avons disposé (IBM 7094, 2ème version), il convient de ne pas dépasser 450 équations.

Il y a quelques années, l'ordre 200 était d'accès difficile (*).

Le rejet des charges types du Bureau of Reclamation présente de l'intérêt. Il permet de remplacer en gros le calcul d'un barrage symétrique par un barrage dissymétrique en conservant le même nombre d'ajustements.

Ceci a été fait par Mladyenovitch [23] et Beaujoint [3] proposant d'avoir les mêmes profils de charge élémentaires sur les arcs et sur les consoles.

De cette façon, les équations d'équilibre à chaque nœud n'ont pas besoin d'être écrites puisqu'une charge type appliquée positivement à l'arc et négativement à la console forme un ensemble extérieurement nul.

Le nombre des équations à écrire est ainsi réduit à n × p.

Nous appelons ces charges "les charges types auto-équilibrées".

La figure III,3 donne les charges auto-équilibrées d'arc et de console.

III.3.1 - Méthode de Tonini

Elle est une simple transcription en machine de la T.L.A. Dans son aspect primitif, seul l'ajustement radial est réalisé.

III.3.2 - Méthode de Beaujoint

Elle utilise les charges auto-équilibrées et réalise 5 ajustements.

Le tableau III.1 énumère les 5 composantes du déplacement et du champ ajustant prises en compte.

(*) Il s'agit bien entendu de systèmes *"pleins"* dont peu de termes sont nuls, résolus de façon *"exacte"* par la méthode de Gauss par exemple.

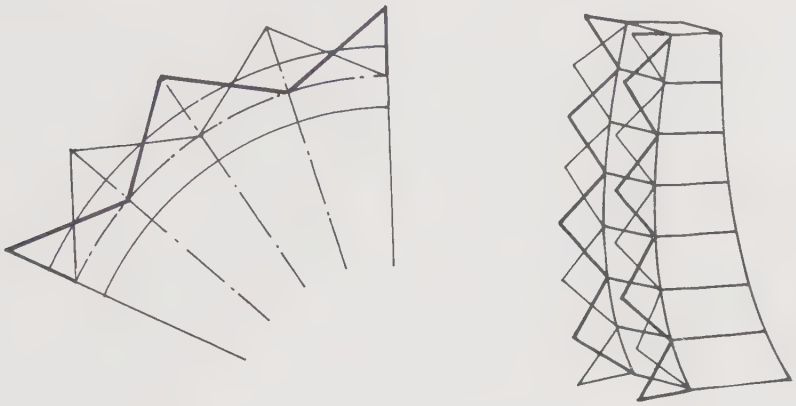


Figure III, 3 : Charges types auto-équilibrées de l'arc et de la console

Tableau III, 1

Déplacement	Champ ajustant
1 : Translation parallèle à l'axe de la vallée	1 : Force horizontale perpendiculaire à la surface moyenne
2 : Translation perpendiculaire à l'axe de la vallée	2 : Force horizontale tangente à la surface moyenne
3 : Translation verticale	3 : Force verticale
4 : Rotation d'axe tangent à la fibre moyenne de l'arc	4 : Couple de torsion d'arc
5 : Rotation d'axe vertical	5 : Couple de torsion de console

Les fibres moyennes des consoles sont les trajectoires orthogonales de celles des arcs.

De plus, cette méthode prend en compte l'effet de Poisson.

S'il n'y avait pas d'effet de Poisson, une charge placée à l'intersection de l'arc I et de la console J influencerait seulement ces deux éléments en terme d'effort et en terme de déplacement. En effet, les arcs et les consoles sont complètement désolidarisés les uns des autres.

L'effet de Poisson couple les arcs et les consoles de façon plus complète. Une charge placée à l'intersection de l'arc I et de la console J influence tous les arcs inférieurs en termes d'efforts et de déplacements et toutes les consoles en terme de déplacement. Ce point est développé de façon plus détaillée dans le chapitre V, qui traite des coefficients d'influence complets.

La figure (III, 4) donne l'effet d'une charge en A quand on ne tient pas compte de l'effet de Poisson (effet direct) et les figures (III, 5) et (III, 6) sont dans le cas où l'effet de Poisson est pris en compte.

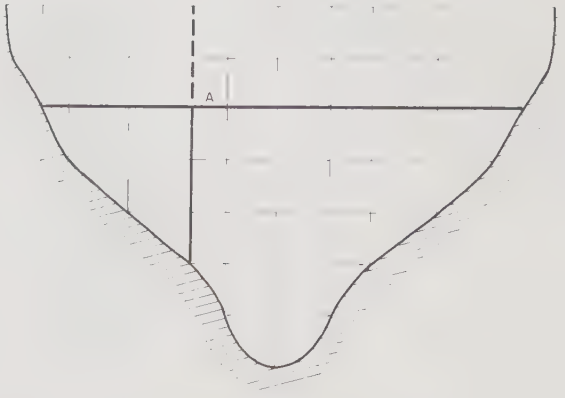


Figure III, 4 : Effet "Direct" dû à la partie positive de la charge appliquée à l'arc et à la partie négative de la charge appliquée à la console en A

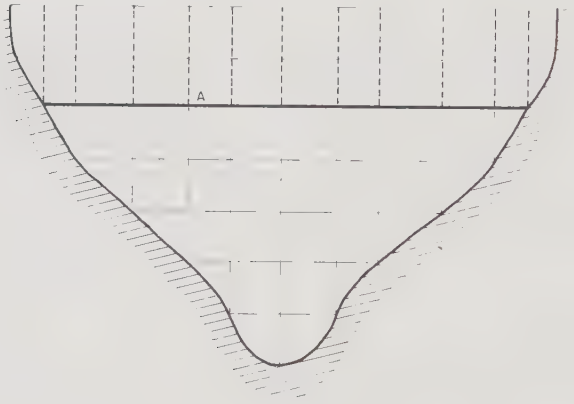


Figure III, 5 : Effet de "Poisson" dû à la partie positive de la charge appliquée à l'arc en A

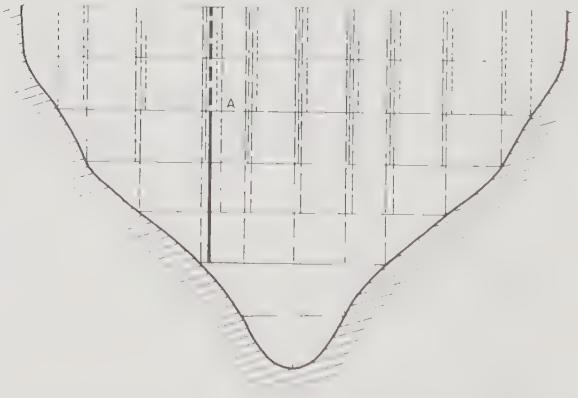


Figure III, 6 : Effet de "Poisson" dû à la partie négative de la charge appliquée à la console en A

III.4 - MÉTHODE PROPOSÉE

La méthode que nous avons prise reprend les idées des précédents auteurs, à savoir :

- le partage des charges entre [arc] et [console] ;
- la charge type du Bureau of Reclamation, modifiée par Beaujoint et Mladyenovitch ;
- les éléments-pilotes orthogonaux de Beaujoint.

La théorie des coques suggère quelques concepts supplémentaires que les possibilités des machines à calculer permettent d'introduire dans le calcul. En particulier, un système d'axes local est utilisé, plus proche de la théorie des coques. Pour cela, nous remplaçons l'axe horizontal perpendiculaire à la fibre moyenne de l'arc par l'axe normal à la surface moyenne s'appuyant sur cette fibre moyenne.

Cette dernière modification a la principale conséquence suivante :

Même si le nombre de composantes du champ ajustant et donc du déplacement ajusté est réduit à 1, presque toute l'énergie locale de la coque peut se développer.

En effet, une composante radiale et horizontale en terme d'effort a seulement les effets suivants :

a) pour l'arc :

- moment fléchissant d'axe vertical,
- effort normal,
- effort tranchant ;

b) pour la console :

- moment fléchissant d'axe horizontal et tangentiel,
- effort normal,
- effort tranchant.

Mais une composante perpendiculaire à la surface moyenne provoque l'apparition de *tous les types* d'efforts.

Cette particularité explique la forme des isostatiques obtenues par ajustement radial (voir chapitre "Résultats").

D'autre part, la théorie des coques fournit une expression cohérente de la matrice de déformabilité (flexibilité) intrinsèque de l'élément de coque.

La formulation purement matricielle que nous employons rend très simple le transport dans les axes généraux d'une déformabilité calculée dans des axes locaux. Les opérations d'intégration réalisées dans les axes généraux sont rendues particulièrement faciles.

La matrice de déformabilité d'un voussoir d'arc a une expression qui découle directement de celle de l'énergie ; il en est de même pour la console.

Les déformabilités d'arc et de console sont notées :

$$[F_a] \times d\alpha$$

$$[F_c] \times d\beta$$

$[F_a]$ et $[F_c]$ sont transformées en coefficients d'influence, que nous les donnons dans le chapitre IV, par action des matrices de changement d'axes définies dans le même chapitre.

Le développement des matrices et l'obtention des formules lourdes est évitée parce que les produits matriciels sont obtenus de façon purement numérique.

En ce qui concerne la déformabilité de la fondation, nous avons donné une forme matricielle à la seule théorie existante, celle du "Bureau of Reclamation" due à Vogt [30]. De cette façon, nous construisons une matrice de déformabilité intrinsèque d'appui qui est traitée de la même façon que celle des voussoirs d'arc et de console, ou tout simplement des éléments différentiels de la coque.

III.4.1 - Remarques

a) Le fait que les consoles sont les trajectoires orthogonales des arcs est traduit par le paramètre ε (largeur de la console) qui est une fonction de la hauteur ;

b) La résolution du système d'équations linéaires est faite par la méthode de Householder [19]. Le fait que la matrice peut être traitée colonne par colonne permet de résoudre des systèmes d'ordre 450.

Le tableau (III,2) résume différentes étapes du calcul par ajustement.

Les expressions de la matrice de déformabilité intrinsèque d'arc et celle de console sont données dans le tableau III,3.

III.4.2 - Nota

Les 6 composantes de la charge sont :

P_1, P_2, P_3 pour les forces dirigées selon OX, OY, OZ et P_4, P_5, P_6 pour les couples d'axes X, Y, Z.

Les 6 composantes du déplacement sont :

U_1, U_2, U_3 pour la translation selon OX, OY, OZ et U_4, U_5, U_6 pour les rotations d'axe OX, OY, OZ.

Dans le système d'axes intrinsèque de l'arc, de la console ou de la fondation, ces composantes sont indicées par a, c et f.

Tableau III. 2

	Auteur	Possibilité d'ajustements	Nombre d'ajustements	Ordre du système linéaire	Système d'axes
Calcul à la machine de bureau	Résal 1919	Ajustement de clé	1	Non discrétisé	Horizontal et radial
	Trial Load Analysis 1925	Ajustement radial	1	Nombre des nœuds	Horizontal et radial
	Amplified Trial Load Analysis 1938	Translations radiale et tangentielle ; rotation d'axe vertical	3	3 × nombre des nœuds	Horizontal et radial
Début du calcul sur ordinateur	Tonini 1955	Translation radiale avec des charges types ordinaires	1	2 × nombre des nœuds	Horizontal et radial
	Beaujoint 1958	Translation radiale, tangentielle et verticale ; rotation d'axe tangentiel et d'axe vertical(*)	5	5 × nombre des nœuds	Horizontal et radial
2ème génération de calcul sur ordinateur	Travail présenté ici 1967	Translation radiale, tangentielle et verticale ; rotation d'axe tangentiel, vertical et radial	1 à 6	(1 à 6) × nombre des nœuds	Axes intrinsèques de coque
	En cours d'essais	Translation radiale, tangentielle et verticale ; rotation d'axe tangentiel et d'axe vertical. Conditions sur les efforts. Effet de Poisson. Effet de l'entraînement	7 (max.)	7 × nombre des nœuds	Axes intrinsèques de coque

(*) Cette méthode tenait compte de l'effet de Poisson.

Tableau III. 3

Matrice de déformabilité intrinsèque de l'arc $[F_a]$
Matrice de déformabilité intrinsèque de la console $[F_c]$

$[F_a] =$

U_{1a}	$\frac{1}{F_2}\,ds$						P_{1a}
U_{2a}		$\frac{1,25}{F_2}\,ds$					P_{2a}
U_{3a}			$\frac{1}{F_1}\,ds$				P_{3a}
U_{4a}				$\frac{1}{I_2}\,ds$			P_{4a}
U_{5a}					0		P_{5a}
U_{6a}						$\frac{1}{I_1}\,ds$	P_{6a}

$[F_c] =$

U_{1c}	$\frac{1}{F_1}\,ds$						P_{1c}
U_{2c}		$\frac{1,25}{F_2}\,ds$					P_{2c}
U_{3c}			$\frac{1}{F_2}\,ds$				P_{3c}
U_{4c}				$\frac{1}{I_1}\,ds$			P_{4c}
U_{5c}					0		P_{5c}
U_{6c}						$\frac{1}{I_2}\,ds$	P_{6c}

$\frac{1}{I_1} = \frac{12}{Ee^3}$ Inertie de flexion

$\frac{1}{I_2} = \frac{12\,(1+\nu)}{Ee^3}$ Inertie de torsion

$\frac{1}{F_1} = \frac{1+\nu}{Ee}$ Déformabilité à l'effort tranchant transversal

$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{Ee}$ Déformabilité à l'effort normal

Nota : La théorie des coques de Love-Kirchhoff ne permet pas de calculer le second terme de la diagonale principale.

Chapitre IV

Coefficients d'influence

Le théorème de superposition permet de dire que l'effet du champ ajustant en termes de déplacements et d'efforts s'obtient par superposition d'effets élémentaires dus à ses composantes unitaires, les charges types.

Autrement dit, la fonction champ ajustant est approchée par une combinaison élémentaire de charge type Q_i :

$$\text{Champ ajustant} = \Sigma\ X_i\ Q_i$$

les X_i sont les intensités nodales du champ ajustant.

La charge extérieure est décomposée de la même façon :

$$\text{Charge extérieure} = \Sigma\ Y_i\ Q_i$$

On doit tenir compte de la différence entre la charge type qui sert au calcul des coefficients d'influence et la charge type du champ ajustant.

Les coefficients d'influence décrivent l'effet des charges types en termes de déplacements et d'efforts.

En effet, si le couplage entre les arcs et les consoles par effet de Poisson est pris en compte, nous distinguerons :

- les coefficients directs mesurant l'effet d'une charge sur l'élément pilote qui la porte ;
- les coefficients complets mesurant l'effet d'une charge sur l'ensemble du barrage. De ce point de vue, il n'est plus possible de dissocier l'effet sur l'arc I et celui sur la console J. On les groupe et on parle alors de l'effet de la charge complète.

IV.1 - DESCRIPTION DES COEFFICIENTS D'INFLUENCE DIRECTE

Les coefficients d'influence directe sont les tableaux à six indices de petites matrices dont les dimensions sont 6 × 6.

IV.1.1 - Coefficients d'influence directe des consoles

Ils sont représentés par :

$$[I\ D\ C]^{K,J,TS}_{I,J,TE}$$

Chacun des coefficients [I D C] est une matrice élémentaire d'ordre 6 × 6. L'indice J étant répété, ces matrices constituent elles-mêmes un tableau défini par 5 indices indépendants.

- Indices inférieurs, caractérisant l'effet (influencé) :

  - J est l'indice de la console considérée, variation de 1 à NC (nombre des Consoles)

  - I est l'indice du nœud où on cherche l'effet (variation de 1 à m), m (étant une fonction de J) est le numéro de l'arc le plus bas rencontrant la console

  - TE : type d'effet

    TE = (1) effort

    TE = (2) déplacement

    TE = (3) déplacement d'appui.

- Indices supérieurs, caractérisant la sollicitation (influençant) :

  - J est l'indice de la console considérée

  - K est l'indice du nœud où agit la sollicitation, variation de 1 à m,

  - TS : type de sollicitation

    TS = (1) charge type triangulaire

    TS = (2) effet Poisson

    TS = (3) effet thermique

    TS = (4) déplacement d'appui.

IV.1.2 - Coefficients d'influence directe des arcs

Ils sont représentés par :

$$[I\ D\ A]^{J,K,TS}_{J,I,TE}$$

Les positions des indices ont la même signification que dans le cas des consoles.

Sur un arc J donné, I et K varient entre "min" et "max" qui sont des fonctions du n° d'arc J.

Les sous-ensembles où TE et TS sont invariants et où I, J, K, L gardent tous leurs variances, constituent un certain nombre de tableaux (tableau IV.1).

IV.2 - CHARGES ASSOCIÉES AUX CALCULS DES COEFFICIENTS D'INFLUENCE

On considère un élément pilote schématisé par le segment AB (fig. IV.1) et on effectue le calcul des effets des charges Q_A, puis des charges Q_B, et on superpose convenablement de manière à avoir des effets des charges Q.

Dans le cas de la figure IV.1 où on considère AB du type "arc" coupé par 4 consoles ayant deux appuis communs avec deux consoles, on aura 6 charges dont 2 seront incomplètes. Elles sont présentées dans la figure IV.2.

Cas TS = 1 Les effets produits sous l'action de la charge triangulaire

		TS = 1	
		console	arc
TE = 1	I < K	0	$[IDA]^{J,K,1}_{J,I,1}$
	I ≥ K	$[IDC]^{K,J,1}_{I,J,1}$	
TE = 2		$[IDC]^{K,J,1}_{I,J,2}$	$[IDA]^{J,K,1}_{J,I,2}$
TE = 3		$[IDC]^{K,J,1}_{I,J,3}$ I=m	0

Cas TS = 2 Les effets produits par effet de Poisson

	TS = 2	
	console	arc
TE = 1	0	$[IDA]^{J,K,2}_{J,I,1}$
TE = 2	$[IDC]^{K,J,2}_{I,J,2}$ pour I ≤ K	$[IDA]^{J,K,2}_{J,I,2}$

Cas TS = 3 Les effets produits par effet thermique

	TS = 3	
	console	arc
TE = 1	0	$[IDA]^{J,K,3}_{J,I,1}$
TE = 2	$[IDC]^{K,J,3}_{I,J,2}$ pour I ≤ K	$[IDA]^{J,K,3}_{J,I,2}$

Cas TS = 4 Ce cas correspond aux effets produits dûs à un déplacement imposé aux appuis

	TS = 4	
	console	arc
TE = 1	0	$[IDA]^{J,K,4}_{J,I,1}$
TE = 2	$[IDC]^{K,J,4}_{I,J,2}$ (K = m)	$[IDA]^{J,K,4}_{J,I,2}$

Tableau IV.1

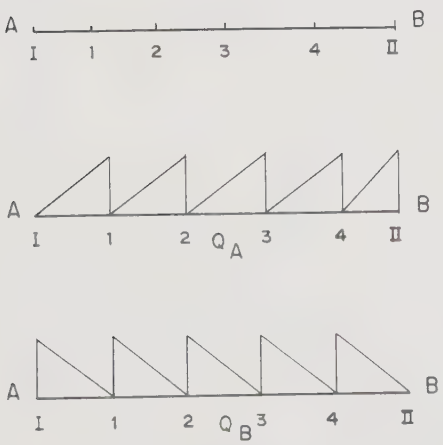


Figure IV.1

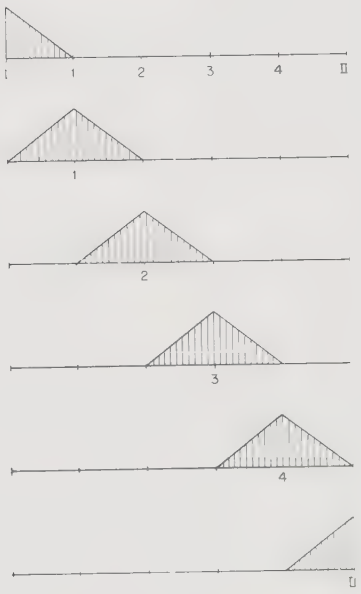


Figure IV.2

CONVENTION D'AXES

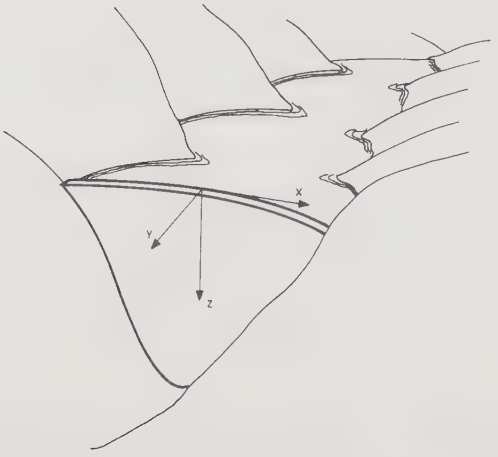


Figure IV,3 : Convention d'axes

IV.3 - TECHNIQUE DE CALCUL

Les références relatives au calcul matriciel appliquées aux poutres sont nombreuses,[2] par exemple.

Dans le cas des éléments pilotes d'un barrage-voûte, calcul ici étudié, les constructions des différentes matrices ont été détaillées par M. Boisserie [7].

L'espace utilisé est à 6 dimensions, aussi bien pour les degrés de liberté des éléments résistants (l'élément de fondation a toujours tous les 6 degrés de liberté), que pour les composantes des efforts et des déplacements.

IV.3.1 - Conventions

IV.3.1.1 - Axes généraux

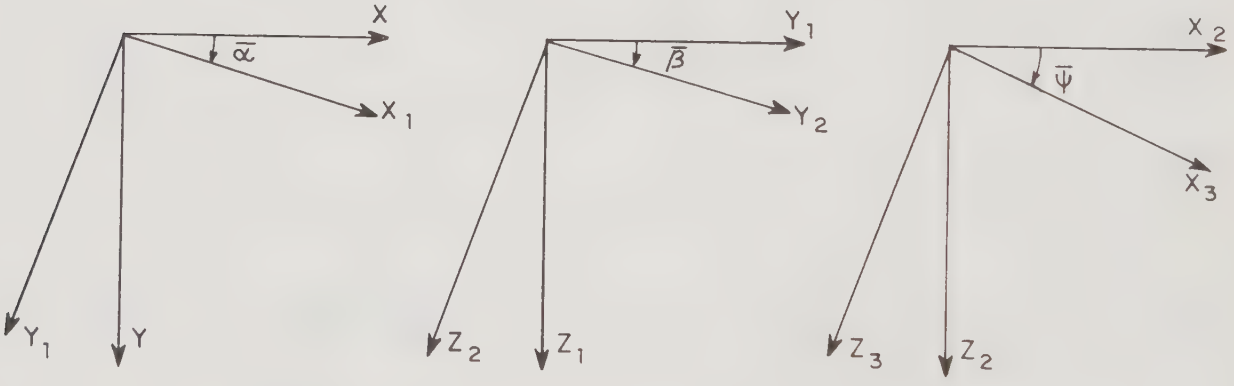
Le système d'axes généraux est ainsi défini :

- OX dirigé de la rive droite à la rive gauche (en regardant vers l'amont),
- OY dirigé de l'amont vers l'aval,
- OZ dirigé vers le bas (fig. IV.3).

Rotations finies :

Le changement d'axes se fait dans l'ordre suivant :

$$OXYZ \longrightarrow OX_1Y_1Z_1 \longrightarrow OX_2Y_2Z_2 \longrightarrow OX_3Y_3Z_3$$



Les opérateurs qui transforment les composantes d'un vecteur du système $OX_jY_jZ_j$ au système $OX_iY_iZ_i$ sont désignés par A_{ij}.

IV.3.1.2 - Axes intrinsèques d'arc et de console

Le système d'axes intrinsèques d'arc et de consoles se déduit du système d'axes généraux par une rotation $\bar{\alpha}$ autour de OZ, puis d'une rotation $\bar{\beta}$ autour de OX_1 :

$$\bar{\alpha} = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX_1}) = (\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OY_1})$$

$$\bar{\beta} = (\overrightarrow{OY_1}, \overrightarrow{OY_2}) = (\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2})$$

dans le cas des arcs plans : $\bar{\beta} = 0$.

Ces axes sont :

- OX_2 dirigé dans le sens des s croissants (s est l'abscisse curviligne),
- OY_2 dirigé vers la concavité de l'arc,
- OZ_2 vers le bas.

Ces 3 axes doivent former un système droit.

IV.3.1.3 - Axes intrinsèques de fondation

Le système d'axes intrinsèques de fondation se déduit du système intrinsèque d'arc par une rotation $\bar{\Psi}$ autour de OY_2 :

$$\bar{\Psi} = (\overrightarrow{OX_2}, \overrightarrow{OX_3}) = (\overrightarrow{OZ_2}, \overrightarrow{OZ_3})$$

Remarque :

Le sens positif des angles et des moments est celui qui permet de passer de OX à OY, de OY à OZ et de OZ à OX ; le sens positif se conserve dans tous les systèmes d'axes.

IV.3.2 - Matrices de changement d'axes

Les opérateurs A_{ij}, déjà exprimés, peuvent être considérés comme le produit dans l'ordre convenable des opérateurs suivants :

A_{10}

	X	Y	Z
X_1	$\cos\bar{\alpha}$	$\sin\bar{\alpha}$	0
Y_1	$-\sin\bar{\alpha}$	$\cos\bar{\alpha}$	0
Z_1	0	0	1

A_{21}

	X_1	Y_1	Z_1
X_2	1	0	0
Y_2	0	$\cos\bar{\beta}$	$\sin\bar{\beta}$
Z_2	0	$-\sin\bar{\beta}$	$\cos\bar{\beta}$

A_{32}

	X_2	Y_2	Z_2
X_3	$\cos\bar{\Psi}$	0	$\sin\bar{\Psi}$
Y_3	0	1	0
Z_3	$-\sin\bar{\Psi}$	0	$\cos\bar{\Psi}$

IV.3.2.1 - Produit vectoriel

Le produit vectoriel $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{X}$ a une écriture matricielle [PV] [X] dans le système d'axes OXYZ :

[PV] =

0	- z	y
z	0	- x
- y	x	0

Si l'origine est en un point distinct de 0, m par exemple, $\overrightarrow{m\,M} \wedge \vec{X}$ s'écrira [P V m M] [X] avec :

$$[P\ V\ m\ M] = \begin{bmatrix} 0 & -(z_M - z_m) & (y_M - y_m) \\ (z_M - z_m) & 0 & -(x_M - x_m) \\ -(y_M - y_m) & (x_M - x_m) & 0 \end{bmatrix}$$

on peut noter que :

$$[P\ V\ m\ M] = [P\ V\ M\ m]^T$$

IV.3.3 - Changement d'axes complets, transport des efforts et des déplacements

Le vecteur densité de charge, comme le vecteur densité des efforts, est formé par trois composantes de la dimension d'une force et trois composantes de la dimension d'un couple.

Le vecteur déplacement a également trois composantes de translation et trois composantes de rotation.

Ces composantes sont rangées dans l'ordre précisé par le tableau IV.1.

Tableau IV.1

Efforts

Efforts de consoles	Efforts d'arc
1 : Effort tranchant transversal	1 : Effort normal
2 : Effort tranchant radial	2 : Effort tranchant radial
3 : Effort normal	3 : Effort tranchant vertical
4 : Moment fléchissant d'axe tangentiel	4 : Moment de torsion
5 : Moment fléchissant d'axe radial	5 : Moment fléchissant d'axe radial
6 : Moment de torsion	6 : Moment fléchissant d'axe tangentiel

Déplacements

Dans les axes intrinsèques	Dans les axes généraux
1 : Translation tangentielle horizontale	1 : Translation projetée sur OX
2 : Translation radiale	2 : Translation projetée sur OY
3 : Translation verticale	3 : Translation projetée sur OZ
4 : Rotation d'axe tangentiel et horizontal	4 : Rotation projetée sur OX
5 : Rotation d'axe radial	5 : Rotation projetée sur OY
6 : Rotation d'axe vertical	6 : Rotation projetée sur OZ

L'opérateur [T E m p] permet le transport des efforts de p en m :

$$[T\ E\ m\ p] = A_{io}(m) \cdot \begin{vmatrix} I & 0 \\ [P\ V\ m\ p] & I \end{vmatrix} \cdot A_{oi}(p)$$

I est la matrice d'unité d'ordre 3 × 3 et 0 la matrice nulle du même ordre,

p est le point d'application de la charge et m le point où l'effort est mesuré.

De même, l'opérateur [T D M m] permet le transport des déplacements de m en M :

$$[T\ D\ M\ m] = A_{io}(M) \cdot \begin{vmatrix} I & [P\ V\ M\ m] \\ 0 & I \end{vmatrix} \cdot A_{oi}(m)$$

Ces opérateurs [T E m p] et [T D M m] permettent d'exprimer dans les axes généraux (les axes fixes) les déformabilités des voussoirs mesurées dans les axes de la théorie des coques et les déformabilités de fondation mesurées dans les axes de la fondation.

Par intégration numérique, la déformabilité d'un ensemble de voussoirs de l'élément pilote et de voussoirs de fondation peut être calculée; on obtient ainsi les *coefficients d'influence*.

IV.3.4 - Traduction en machine

Nous donnons la généralité sur la macro-instruction "DOTEMP" et ses satellites "PROVEC, AUX et EULER" tels que nous les avons réalisés.

L'objet de DOTEMP est de calculer les matrices complètes de changement d'axes des efforts et des déplacements.

Cette macro-instruction travaille en simple précision, ce qui limite la précision du calcul sur IBM 7094, mais perd tout inconvénient sur un ordinateur qui travaille avec plus de chiffres (C.D.C. 6600).

Le taux d'utilisation dans des calculs d'éléments pilotes à fibre gauche est très élevé. Sous sa forme actuelle, elle rend très simple le déplacement de l'origine des axes (dans ces conditions, le contrôle en est rendu très facile).

Enfin, elle peut servir à tout problème tridimensionnel des poutres et a donc un champ d'utilisation qui dépasse celui du barrage-voûte.

Les intégrales sont calculées par la formule du rectangle, mais les intervalles d'intégration sont petits (*).

L'expression de la matrice de déformabilité du voussoir élémentaire pour les arcs et les consoles, déterminées par la théorie des coques de Love, sont données par le tableau III.3.

(*) Nous avons fait une étude numérique sur la précision du calcul en faisant varier le nombre de voussoirs entre deux nœuds exclusifs d'un arc.

SUBROUTINE EULER (A, GP, KVAR)

- Objet et Arguments :

Euler calcule les opérateurs A_{ij}

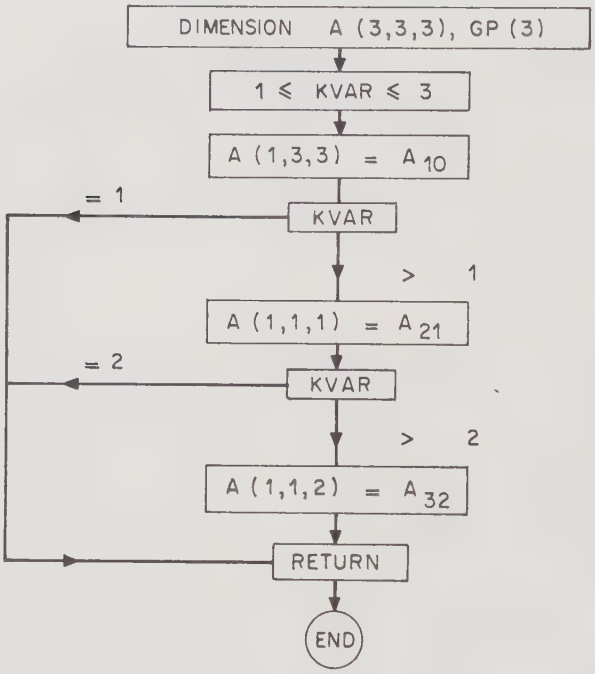
KVAR = 1 il calcule A_{10},

KVAR = 2 A_{10} et A_{21} et pour

KVAR = 3 A_{10}, A_{21}, et A_{32}.

GP sont les coordonnées angulaires du point considéré.

- Organigramme :

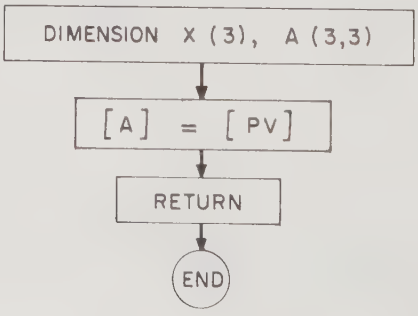


SUBROUTINE PROVEC (X, A)

- Objet :

Provec remplit la matrice [PV] étant données les coordonnées du vecteur X.

- Organigramme :



SUBROUTINE AUX (GC, GE, KVAR)

- Objet :

pour KVAR = 1 Euler calcule A_{10} et AUX la recopie

pour KVAR = 2 Euler calcule A_{10} et A_{21} et AUX fait le produit $A_{21} \times A_{10}$
$A_{20} = A_{21} \times A_{10}$

pour KVAR = 3 Euler calcule A_{10}, A_{21} et A_{32} et AUX fait le produit $A_{30} = A_{32} \times A_{21} \times A_{10}$

SUBROUTINE DOTEMP (RP, RM, GP, GM, TEMP, IVAR, KVAR)

- Objet :

DOTEMP calcule la matrice complète de changement d'axes des efforts (IVAR = 1)
ou celle des déplacements (IVAR = 2)

KVAR = 1 correspond seulement à un changement d'axes (A_{10})

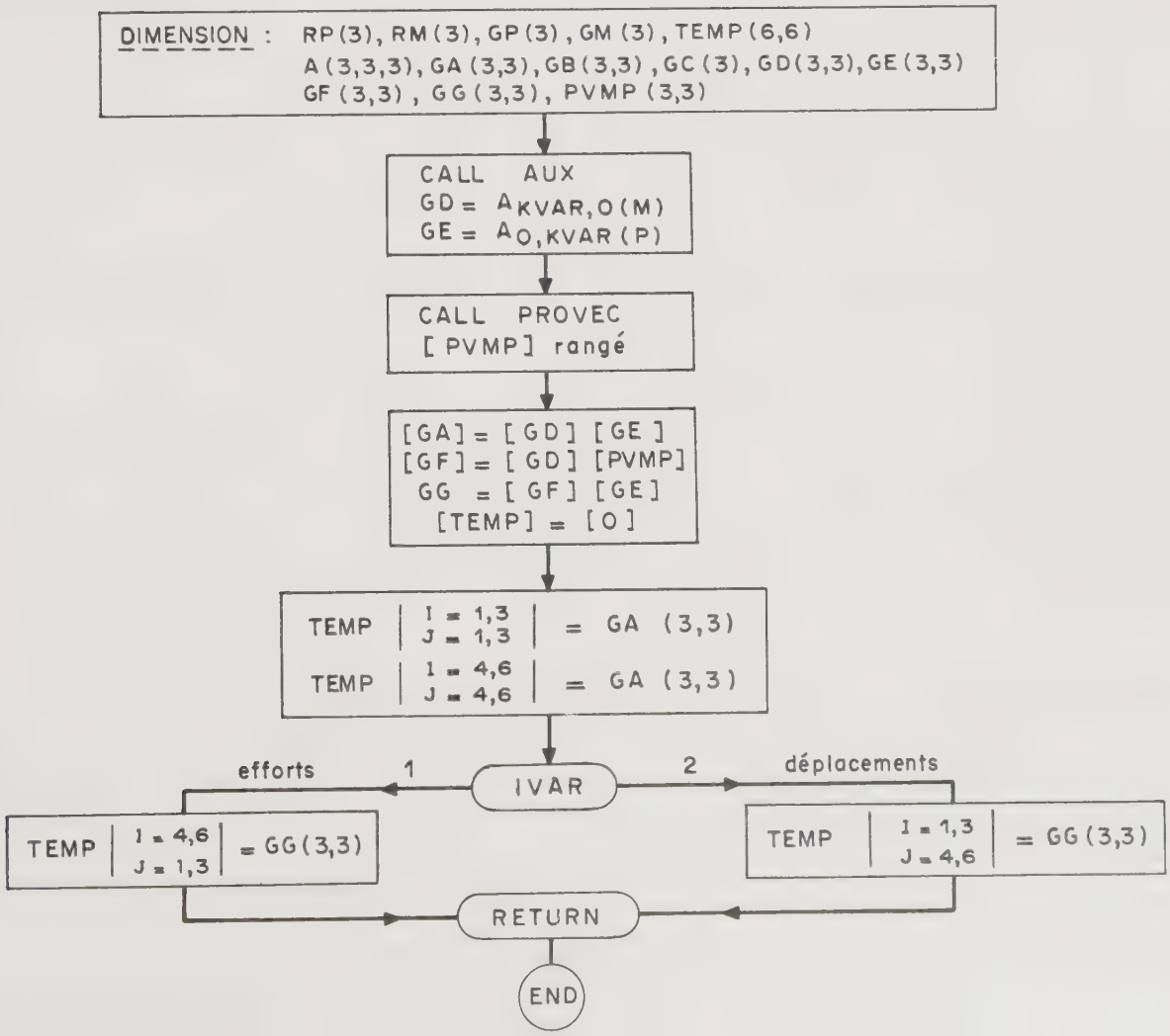
KVAR = 2 correspond à deux changements d'axes (A_{20})

KVAR = 3 correspond à trois changements d'axes (A_{30})

RM et RP les coordonnées x, y, z des points M et P.

GM et GP les coordonnées angulaires des points M et P.

- Organigramme :



Chapitre V

Calcul des coefficients complets - Effets de Poisson Algorithme de l'entraînement

V.1 - COEFFICIENTS D'INFLUENCE COMPLETS D'ARC. "CALCUL ALPHA"

L'objet de ce calcul est l'ensemble des coefficients complets d'arc. Ces coefficients expriment l'influence en terme *d'efforts et de déplacements* (le type d'effet TE = 1 et 2) regardés à l'intersection de l'arc I et de la console J d'une charge triangulaire complète et unitaire agissant à l'intersection de l'arc L et de la console K (le type de sollicitation TS = 1).

Cet effet est la somme de deux termes :

- celui dû à la partie positive de la charge appliquée à l'arc, ce terme n'est différent de zéro que si le point influençant et le point influencé se trouvent sur le même arc (I = L). Ce terme est obtenu par la consultation de la table des coefficients d'influence directs ;

- celui dû à la partie négative de la charge appliquée, elle, à la console.

Cette partie de la charge produit dans la console du point influençant (console K) des efforts de type effort normal et moment fléchissant de console (N_c et M_c) au sens de la résistance des matériaux qui vont avoir un effet de Poisson sur tous les arcs coupés par la console K et dans leur partie située au-dessous de l'arc L.

Les coefficients qui servent à calculer ce terme sont obtenus par la consultation de la table des coefficients directs. Il y a une sommation pour l'effort normal et pour le moment fléchissant.

La formulation du calcul ALPHA est donnée ci-après :

$$ICA^{L,K,1}_{I,J,TE} = \delta^{L}_{I}\ IDA^{L,K,1}_{I,J,TE} - \sum_{(NetM)} IDA^{I,K,2}_{I,J,TE}\ IDC^{L,K,1}_{I,K,1}$$

δ^{L}_{I} est le symbole de Kronecker.

$$\delta^{L}_{I} \quad \begin{cases} = 0 & \text{si} \quad I \neq L \\ = 1 & \text{si} \quad I = L \end{cases}$$

V.2 - COEFFICIENTS D'INFLUENCE COMPLETS DE CONSOLE. "CALCUL BÉTA"

L'objet de ce calcul est l'ensemble des coefficients complets de console. Ces coefficients expriment l'influence en terme de *déplacement* (TE = 2) considérés à l'intersection de l'arc I et de la console J d'une charge triangulaire complète et unitaire agissant à l'intersection de l'arc L et de la console K (TS = 1).

Cet effet est également la somme de deux termes :

- l'effet direct dû à la partie négative de la charge appliquée à la console. Ce terme n'est différent de zéro que si le point influençant et le point influencé se trouvent sur la même console (J = K). Ce terme est obtenu par la consultation de la table des coefficients d'influence directs ;

- l'effet de Poisson dû à la charge complète (partie positive appliquée sur l'arc et partie négative sur la console).

La partie positive produit dans l'arc L des efforts de type d'effort normal et moment fléchissant d'arc (N_a, M_a) numériquement importants. Ceux-ci déforment les consoles coupées par l'arc L dans la région située au-dessus de l'arc L, ce qui représente la partie la plus importante de ce terme.

Par ailleurs, la partie négative de la charge appliquée à la console K y a donné des efforts du type N_c et M_c. Ces efforts ont déformé et contraint tous les arcs coupés par cette console et au-dessous de l'arc L, y compris l'arc L lui-même (la charge triangulaire de console est à cheval sur l'arc L et c'est la partie située au-dessus de l'arc L qui crée des efforts numériquement petits dans la console au niveau de l'arc L).

Du fait que les arcs sont contraints et qu'il y existe des efforts N_a et M_a, toutes les consoles coupées par les arcs au-dessous de l'arc L et même l'arc L sont déformés par effet de Poisson, et ceci dans leur partie au-dessus de l'arc considéré.

La sommation de ces petits efforts est effectuée sur un champ étendu et la programmation en est relativement délicate.

L'ordinateur doit posséder une mémoire adressable de façon à rendre très rapide la consultation de la table des coefficients.

La formulation du calcul BÉTA est donnée par :

$$ICC^{L,K,1}_{I,J,TE} = -\delta^{K}_{J}\ IDC^{L,K,1}_{I,J,TE} + \delta^{2}_{TE} \sum_{p\ (Net\,M)} IDC^{P,J,2}_{I,J,TE} \times ICA^{L,K,1}_{P,J,1}$$

Le deuxième terme est obtenu par une sommation non plus de 2 termes, mais de deux fois [m(J) - I] termes, donc le champ de variation de p est de p = I à p = m(J).

Il convient de faire quelques commentaires sur ce changement :

- les coefficients complets d'arc sont numériquement forts sur l'arc chargé et faibles sur les arcs au-dessous de l'arc chargé, puisque les efforts et les déplacements sur ceux-ci ne viennent que d'effet de Poisson ;

- la sommation intéresse tous les termes, forts et faibles, au sens de la phrase précédente. La console est donc déplacée sous l'effet cumulé des efforts N et M, forts sur l'arc chargé (p = L) et des efforts N et M, induits eux-mêmes par effet de Poisson, sur les arcs non chargés.

V.2.1 - Remarque

On doit remarquer que l'algorithme de l'effet de Poisson n'est fini que parce que les arcs sont les seuls à être hyperstatiques.

V.3 - L'ALGORITHME DE L'ENTRAÎNEMENT

Les calculs "ALPHA" et "BÉTA" correspondant aux coefficients complets d'arc et de console sont complétés par l'introduction des termes provenant de l'algorithme de l'entraînement.

Ces termes correspondent à une extension du champ de TS et de TE.

V.3.1 - Calcul "ALPHA" complet

Considérons les termes d'entraînement dûs à la partie négative de la charge appliquée à la console, car la partie positive de la charge appliquée à l'arc ne donne pas de terme de ce genre.

Un seul arc est influencé, c'est celui dont la fondation est commune avec la console K.

L'effet au pied de la console est obtenu par calcul des efforts en ce point, puis des déplacements par produit des efforts par la rigidité de fondation. Le résultat obtenu est un type d'effet particulier (TE = 3). Cet effet devient un type de sollicitation particulier pour les arcs. C'est le type de sollicitation 4 auquel est associée une table de

$$IDA^{I,K,4}_{I,J,TE}$$

le terme complémentaire de l'entraînement est donc :

$$IDA^{I,K,4}_{I,J,TE} \times IDC^{L,K,1}_{I,K,3}$$

La formulation complète du calcul "ALPHA" est finalement donnée par :

$$ICA^{L,K,1}_{I,J,TE} = \delta^{L}_{I}\ IDA^{L,K,1}_{I,J,TE} - \sum_{NetM} IDA^{I,K,2}_{I,J,TE}\ IDC^{L,K,1}_{I,K,1}$$

$$- \delta^{max(I)}_{K}\ IDA^{I,K,4}_{I,J,TE}\ IDC^{L,K,1}_{I,K,3} - \delta^{min(I)}_{K}\ IDA^{I,K,4}_{I,J,TE}\ IDC^{L,K,1}_{I,K,3}$$

V.3.2 - Calcul "BÉTA" complet

Considérons les termes d'entraînement dûs à la charge complète.

La partie positive appliquée sur l'arc L influe la console dont le pied est commun avec l'arc L, ce qui produit la première partie du terme.

La partie négative appliquée sur la console K influe l'arc dont le pied est commun avec la console K et cet arc va influencer de nouveau la console dont le pied est commun avec cet arc.

Ces deux effets cumulés sont obtenus dans les termes de coefficients complets d'arc (calcul "ALPHA") dans la table de :

$$ICA^{L,K,1}_{m,J,2}$$

Cet effet va devenir un type de sollicitation TS = 4 auquel est associée une table de :

$$IDC^{m,J,4}_{I,J,TE}$$

d'où on trouve le terme complémentaire d'entraînement :

$$IDC^{m,J,4}_{I,J,TE} \times ICA^{L,K,1}_{m,J,2}$$

La formulation complète du calcul "BÉTA" est finalement donc :

$$ICC^{L,K,1}_{I,J,TE} = -\delta^{K}_{J} \; IDC^{L,K,1}_{I,J,TE} + \delta^{-2}_{TE} \sum_{\substack{p \\ (N,M)}} IDC^{p,J,2}_{I,J,TE} \; ICA^{L,K,1}_{P,J,1} + \delta^{2}_{TE} \; IDC^{m,J,4}_{I,J,TE} \; ICA^{L,K,1}_{m,J,2}$$

Nota :

La figure III,4 schématise l'effet direct,

Les figures III,5 et III,6 schématisent l'effet de Poisson,

Les figures V,1 et V,2 schématisent l'effet de l'entraînement.

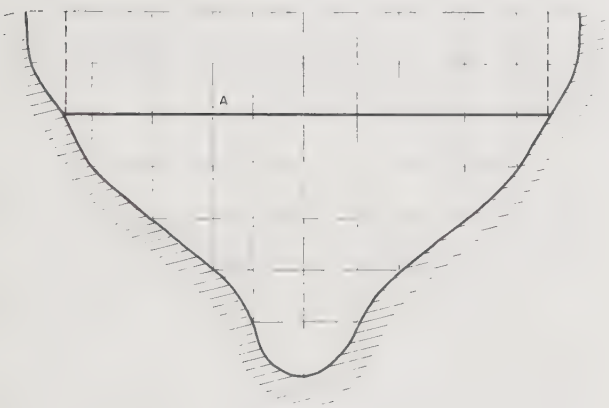


Figure V.1 - Effet "d'entraînement" dû à la partie positive de la charge appliquée à l'arc en A.

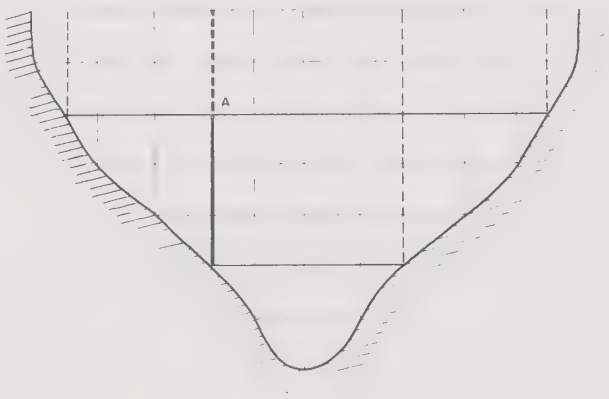


Figure V.2 - Effet "d'entraînement" dû à la partie négative de la charge appliquée à la console en A.

Chapitre VI

Les coefficients de la matrice principale et le second membre du système linéaire

VI.1 - COEFFICIENTS DE LA MATRICE PRINCIPALE

Les coefficients de la matrice principale [P M A] se calculent à partir des coefficients complets d'arcs et de consoles.

La matrice [P M A] est formée par des matrices élémentaires [M A]. Chacune des matrices [M A] étant la forme matricielle des coefficients des équations linéaires à chaque nœud est calculée de la façon suivante à partir des coefficients complets :

$$[MA]_{I,J}^{K,L} = [ICA]_{I,J,2}^{K,L,1} - [ICC]_{I,J,2}^{K,L,1}.$$

La matrice élémentaire est carrée, de l'ordre égal au nombre d'ajustements. Par exemple, si l'on fait un ajustement radial, cette matrice [M A] est réduite à un nombre.

VI.2 - SECOND MEMBRE DU SYSTÈME LINÉAIRE

La matrice [P M A], dont la constitution vient d'être exposée, traduit le pouvoir ajustant (*) du champ inconnu de forces qui est le champ ajustant.

Ce pouvoir s'exerce sur un défaut d'ajustement provoqué par une répartition arbitraire et forcément inexacte de la charge initiale sur le barrage "des arcs" et celui "des consoles".

Numériquement parlant, le défaut d'ajustement est un second membre des équations d'ajustement :

[Pouvoir ajustant] × [Champ ajustant] = [Défaut d'ajustement]

Pour chaque cas de charge (distribution de la pression ou de la température), il existe un second membre. Nous montrons dans l'annexe 2 que le second membre ne dépend pas de la façon dont la charge est répartie entre le barrage des arcs et celui des consoles. Ceci n'est, bien entendu, vrai que pour un découpage en éléments pilotes donné.

Généralement parlant, le calcul du second membre repose sur la détermination des déplacements des arcs et des consoles sous l'effet du partage initial des forces et des déformations imposées.

Lorsqu'on tient compte de l'effet de Poisson ou de l'entraînement, la détermination des déplacements suit celle des efforts.

(*) [P M A] est également la différence entre la déformabilité des arcs et celle des consoles.

VI.3 - CALCUL DES EFFORTS ET DÉPLACEMENTS

Nous donnons ici la formulation du calcul des efforts et déplacements comme elle est effectuée par le Code E.d.F., compte tenu de l'effet de Poisson et d'entraînement [5].

Nous supposons connus les vecteurs $\overrightarrow{CC}$ et $\overrightarrow{CA}$, donnés par le calcul des sollicitations des consoles et des arcs.

VI.3.1 - Consoles prises indépendantes

VI.3.1.1 - Calcul des efforts

Les efforts des consoles sont donnés par un vecteur $\overrightarrow{EC}(K)$, K prenant toutes les valeurs de 1 à m, et J étant le n° d'une console :

$$\overrightarrow{EC}(K) = \sum_{I=1}^{K} [IDC]_{K,J,1}^{I,J,1} \quad \overrightarrow{CC}(I)$$

VI.3.1.2 - Calcul des déplacements

Les déplacements sont des vecteurs $\overrightarrow{DC}(K)$ dont l'expression est :

$$\overrightarrow{DC}(K) = \sum_{I=1}^{m} [IDC]_{K,J,2}^{I,J,1} \quad \overrightarrow{CC}(I)$$

Dans le cas où l'on tient compte de l'effet d'entraînement et si la console n'est pas isolée, nous calculons également le vecteur unique de déplacement $\overrightarrow{DCA}(K)$ qui a pour expression :

$$\overrightarrow{DCA}(K) = \sum_{I=1}^{m} [IDC]_{m,J,3}^{I,J,1} \quad \overrightarrow{CC}(I)$$

VI.3.1.3 - Nota

Ces vecteurs sont dimensionnés à 6. Ils sont calculés pour une console donnée J, donc indicés par J :

$$[\overrightarrow{EC}]_{K,J} \quad , \quad [\overrightarrow{DC}]_{K,J} \quad , \quad [\overrightarrow{DCA}]_{J}$$

VI.3.2 - Arcs pris indépendants

VI.3.2.1 - Calcul des efforts

Soit I le n° de l'arc ; en chaque nœud, nous avons le vecteur $\overrightarrow{CA}(J)$. Les efforts d'arc $\overrightarrow{EA}(K)$, K prenant toutes les valeurs de min à max, sont :

$$\overrightarrow{EA}(K) = \sum_{J=min}^{max} [IDA]_{I,K,1}^{I,J,1} \quad \overrightarrow{CA}(J)$$

VI.3.2.2 - Calcul des déplacements

Il faut constituer les vecteurs $\overrightarrow{DA}(K)$

$$\overrightarrow{DA}(K) = \sum_{J=min}^{max} [IDA]_{I,K,2}^{I,J,1} \quad \overrightarrow{CA}(J)$$

VI.3.2.3 - Nota

Ces vecteurs sont calculés pour un arc donné I, et donc indicés par I :

$$[\overrightarrow{EA}]_{I,K} \quad , \quad [\overrightarrow{DA}]_{J,K}.$$

VI.3.3 - Arcs avant ajustement

I étant le n° de l'arc, les efforts des arcs $[\overrightarrow{VEA}]_{I,K}$ sont donnés par :

$$[\overrightarrow{VEA}]_{I,K} = [\overrightarrow{EA}]_{I,K} + \sum_{J=min}^{max} [IDA]_{I,K,1}^{I,J,2} [L] [\overrightarrow{EC}]_{I,J}$$

Le 2ème terme est dû à l'effet de Poisson. [L] est une matrice logique dont l'expression est donnée au § VI.3.6.

Les déplacements des arcs $[\overrightarrow{VDA}]_{I,K}$ sont également donnés par :

$$[\overrightarrow{VDA}]_{I,K} = [\overrightarrow{DA}]_{I,K} + \sum_{J=min}^{max} [IDA]_{I,K,2}^{I,J,2} [L] [\overrightarrow{EC}]_{I,J}.$$

Dans le cas où l'on tient compte de l'effet d'entraînement, il faut ajouter un terme complémentaire et les efforts et les déplacements des arcs sont donnés respectivement par :

$$[\overrightarrow{VEA}]_{I,K} = [\overrightarrow{EA}]_{I,K} + \sum_{J=min}^{max} [IDA]_{I,K,1}^{I,J,2} [L] [\overrightarrow{EC}]_{I,J} + [IDA]_{I,K,1}^{I,max,4} [\overrightarrow{DCA}]_{max(I)} + [IDA]_{I,K,1}^{I,min,4} [\overrightarrow{DCA}]_{min(I)}$$

et

$$[\overrightarrow{VDA}]_{I,K} = [\overrightarrow{DA}]_{I,K} + \sum_{J=min}^{max} [IDA]_{I,K,2}^{I,J,2} [L] [\overrightarrow{EC}]_{I,J} + [IDA]_{I,K,2}^{I,max,4} [\overrightarrow{DCA}]_{max(I)} + [IDA]_{I,K,2}^{I,min,4} [\overrightarrow{DCA}]_{min(I)}$$

VI.3.3.1 - Remarques

- Pour un arc isolé rive droite, la sommation sur J se fait à partir de J = min + 1 ; il faut aussi ne pas tenir compte de l'influence de $[\overrightarrow{DCA}]_{min(I)}$;

- Pour un arc isolé rive gauche, il faut que la sommation sur J se fasse jusqu'à J = max - 1 ; il faut aussi ne pas tenir compte de l'influence de $[\overrightarrow{DCA}]_{max(I)}$.

VI.3.4 - Consoles avant ajustement

Les consoles étant isostatiques, les efforts des consoles $[\overrightarrow{VEC}]_{K,J}$, J étant le n° de la console, sont :

$$[\overrightarrow{VEC}]_{K,J} = [\overrightarrow{EC}]_{K,J}$$

et les déplacements :

$$[\overrightarrow{VDC}]_{K,J} = [\overrightarrow{DC}]_{K,J} + \sum_{I=K}^{n} [IDC]_{K,J,2}^{I,J,2} [M] [\overrightarrow{VEA}]_{I,J}$$

Le 2ème terme est dû à l'effet de Poisson, [M] est une matrice logique dont l'expression est donnée au § VI.3.6.

Dans le cas où l'on tient compte de l'effet de l'entraînement, les déplacements de la console deviennent :

$$\overrightarrow{[VDC]}_{K,J} = \overrightarrow{[DC]}_{K,J} + \sum_{I=K}^{m} [IDC]_{K,J,2}^{I,J,2} \; [M] \; \overrightarrow{[VEA]}_{K,J} + [IDC]_{K,J,2}^{m,J,4} \; \overrightarrow{[VDA]}_{m,J}.$$

VI.3.4.1 - Remarque

Dans le cas d'une console isolée, la sommation I se fait jusqu'à I = m - 1 et on ne tient pas compte de l'influence de $\overrightarrow{VDA}$.

VI.3.5 - Calcul de second membre

Le second membre (*) est un vecteur $\vec{S}$ constitué par des vecteurs élémentaires $\overrightarrow{[SEC]}_{I,J}$ de dimension égale au nombre d'ajustements.

Ces vecteurs élémentaires se calculent de la façon suivante à partir des déplacements d'arcs et de consoles :

$$\overrightarrow{[SEC]}_{I,J} = \overrightarrow{[VDA]}_{I,J} - \overrightarrow{[VDC]}_{I,J}.$$

VI.3.6 - Nota

Expressions des matrices logiques [L] et [M]

$$[L] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ \hline \end{array} \qquad [M] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & & & & & \\ \hline & & & & & 1 \\ \hline \end{array}$$

(*) Le second membre constitue le "Défaut d'ajustement".

Chapitre VII

Déformation de fondation et d'appui

Au début du développement du calcul des barrages-voûtes, la fondation et les appuis de l'ouvrage étaient considérés comme étant absolument rigides. Par la suite, on dut toutefois tenir compte des effets de déformation élastique dans les rochers de fondation.

La démarche qui a conduit à l'estimation des déformabilités de fondation est la suivante :

- Calcul de la déformation d'un massif indéfini limité par un plan, par intégration sur un rectangle de la solution de Boussinesq ;

- Assimilation de la surface d'intersection de la voûte et de la fondation à un rectangle plan, et donc de la fondation dans son ensemble à un massif indéfini limité par un plan.

Ce résultat n'est acceptable que parce que les solutions tridimensionnelles des équations de l'élasticité ne sont pas d'emploi suffisamment simple pour être utilisables. Il est évident que cette hypothèse est meilleure que celle de l'indéformabilité totale.

Les deux phases de la démarche précédemment exposée ont été faites par le Dr Fréderik Vogt [30].

VII.1 - DÉFORMATION DE LA SURFACE DE FONDATION

VII.1.1 - Notations

Les notations courantes utilisées par l'"United States Bureau of Reclamation (U.S. B.R.)" dans les équations de déformation pour un plan rectangulaire de la surface de fondation sont :

α' : rotation moyenne dans le plan normal à la surface de fondation, due au moment fléchissant

β' : déformation moyenne dans le plan normal à la surface de fondation, due à la charge normale

γ' : déformation moyenne dans le plan de la surface de fondation, due à la charge tangentielle

δ' : rotation moyenne dans le plan de la surface de fondation, due au moment de torsion

α'' : rotation moyenne dans le plan normal à la surface de fondation, due à la charge tangentielle

γ'' : déformation moyenne dans le plan de fondation, due au moment fléchissant

ν : coefficient de Poisson du matériau de fondation

E_r : module d'élasticité du rocher de fondation en compression directe

p : densité superficielle de la charge

a : la plus petite dimension de la surface rectangulaire chargée ab

b : la plus grande dimension de la surface rectangulaire chargée ab

M : le moment de flexion dans la direction de a, valant $p\frac{a^2}{6}$ pour l'unité de longueur de b

N : la charge normale valant p.a pour l'unité de longueur de b

T : la charge tangentielle dans la direction de a, valant p.a pour l'unité de longueur de b

M_t : moment de torsion, valant $p\frac{a^2}{6}$ pour l'unité de longueur de b

VII.2 - ÉQUATIONS DE DÉFORMATIONS

D'après F. Vogt et l'U.S.B.R. [30], [9], [10], on suppose, pour une surface rectangulaire chargée, une distribution uniforme de la charge dans la direction de b. Dans la direction de a, la distribution de la charge est linéaire en terme de moments et uniforme en terme de forces. Cette condition étant satisfaite, la déformation moyenne de la surface considérée pour chaque type de charge est proportionnelle à la densité superficielle de charge (hypothèse d'élasticité de la fondation), et elle dépend de la forme de la surface et des propriétés élastiques du rocher de fondation.

Les formules ci-après, trouvées par F. Vogt et complétées par l'U.S.B.R., donnent les déformations moyennes en fonction des variables ci-dessus. La forme de la surface est définie par les dimensions a et b, la densité superficielle de la charge par p, et les propriétés élastiques du rocher de fondation par ν et E_r.

$$\alpha' = (1 - \nu^2)\frac{p}{E_r} \cdot \frac{3}{\pi}\left[\frac{4}{3}\frac{(a^2 + b^2)^{1/2} - a}{b} - \frac{8}{9}\frac{(a^2 + b^2)^{3/2} - (a^3 + 3/2\ b^3)}{a^2 b}\right.$$

$$\left. - \frac{5}{48}\frac{(a^2 + b^2)^{5/2} - (a^5 + b^5)}{a^4 b} + \frac{4}{3}\frac{b}{a}\ln\left(\frac{a + (a^2 + b^2)^{1/2}}{b}\right)\right]$$

$$\beta' = (1 - \nu^2)\frac{p}{E_r} \cdot \frac{2}{\pi}\left[a \cdot \ln\left(\frac{b + (a^2 + b^2)^{1/2}}{a}\right) \cdots\right.$$

$$\left. + b \cdot \ln\left(\frac{a + (a^2 + b^2)^{1/2}}{b}\right) - \frac{(a^2 + b^2)^{1/2} - (a^3 + b^3)}{3ab}\right]$$

$$\gamma' = (1 - \nu^2)\frac{p}{E_r} \cdot \frac{2}{\pi}\left\{\left[a \cdot \ln\left(\frac{a + (a^2 + b^2)^{1/2}}{a}\right) + b \cdot \ln\left(\frac{a + (a^2 + b^2)^{1/2}}{b}\right) \cdots\right.\right.$$

$$\left. - \frac{(a^2 + b^2)^{3/2} - (a^3 + b^3)}{3ab}\right] + \frac{\nu}{1 - \nu}\left[b \cdot \ln\left(\frac{a + (a^2 + b^2)^{1/2}}{b}\right) \cdots\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(a^2 + b^2)^{1/2}(2b^2 - a^2) - (2b^3 - a^3)}{3ab}\right]\right\}$$

$$\delta' = \frac{p}{E_r} \cdot \frac{1}{30\pi} \left[\left(90 - \frac{24a}{b} + 5\frac{a^2}{b^2} - 3\frac{a^4}{b^4} + \frac{9a^6}{112b^6} \right) \ldots \right.$$

$$\left. + \nu \left(90 - \frac{48a}{b} + \frac{15a^2}{b^2} - \frac{15a^4}{8b^4} + \frac{63a^6}{112b^6} \right) - \nu^2 \left(\frac{24a}{b} - \frac{10a^2}{b^2} + \frac{12a^4}{8b^4} - \frac{54a^6}{112b^6} \right) \right]$$

$$\alpha'' = (1 - \nu - 2\nu^2) \frac{p}{E_r} \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \cdot \right.$$

$$\left. \left[4\frac{a^2 + b^2}{a^2} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{a}{b}\right) - \frac{3b}{a} - \left(\frac{b}{a}\right)^3 \ln \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2} \right) + \frac{a}{b} \ln \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2} \right) \right] \right\}$$

$$\gamma'' = (1 - \nu - 2\nu^2) \frac{p}{E_r} \cdot \frac{a}{b} \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \cdot \right.$$

$$\left. \left[4\frac{a^2 + b^2}{a^2} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{a}{b}\right) - \frac{3b}{a} - \left(\frac{b}{a}\right)^3 \ln \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2} \right) + \frac{a}{b} \ln \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2} \right) \right] \right\}$$

Chacun des coefficients α', β' ... est fonction de deux variables, ν et b/a, ce qui donne avec la convention (fig. VII.1) :

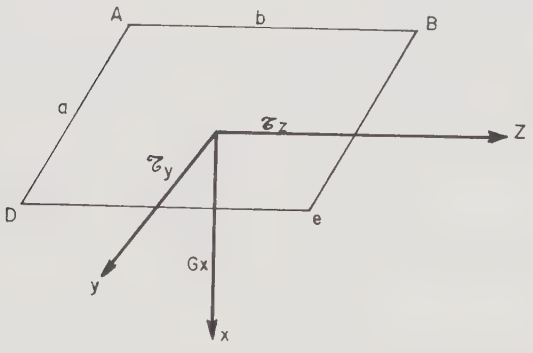


Figure VII.1

Notation de l'U.S.B.R.	Convention pour le déplacement	Charge "p" correspondante
α'	$\Delta\theta_z$	σ_x (M) dû à moment
β'	Δx	σ_x
γ'	Δy	τ_y
δ'	$\Delta\theta_x$	τ_z
α''	$\Delta\theta_z''$	τ_y
γ''	$\Delta y''$	σ_x (M)

Si nous posons :

$$x = \frac{b}{a} \quad , \qquad N = ap = a\sigma_x \quad , \qquad T_y = ap = a\tau_y \quad ,$$

$$M_x = \frac{a^2}{6} p = \frac{a^2}{6} \sigma_x (M) \quad , \qquad M_t = \frac{a^2}{6} p = \frac{a^2}{6} \tau_z$$

nous obtenons :

$$\alpha' = \Delta\theta_z = \frac{1 - \nu^2}{E_r} \frac{M_x}{a^2} \frac{24}{\pi} \cdot$$

$$\left[\frac{\sqrt{1 + x^2}(3 - 14x^2 - 2x^4) - 3 + 15x^3 + 2x^5}{15x} - x \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \right) \right]$$

$$\beta' = \Delta x = \frac{1-\nu^2}{E_r} N \frac{2}{\pi} \cdot$$

$$\left[\ln (x + \sqrt{1+x^2}) + x \ln \left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \right) - \frac{(1+x^2)^{1,5} - (1+x^3)}{3x} \right]$$

$$\gamma' = \Delta y = \frac{1-\nu^2}{E_r} T_y \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\ln (x + \sqrt{1+x^2}) + x \ln \left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \right) - \frac{(1+x^2)^{1,5} - (1-x^3)}{3x} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\nu}{1-\nu} \left[x \ln \left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \right) - \frac{\sqrt{1+x^2}(2x^2-1) - (2x^3-1)}{3x} \right] \right\}$$

$$\delta' = \Delta\theta_x = \frac{1}{E_r} \frac{M_t}{a^2} \frac{1}{5\pi} \left[\left(90 - \frac{24}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{8x^4} + \frac{9}{112x^6} \right) \right.$$

$$\left. + \nu \left(90 - \frac{48}{x} + \frac{15}{x^2} - \frac{15}{8x^4} + \frac{63}{112x^6} \right) - \nu^2 \left(\frac{24}{x} - \frac{10}{x^2} + \frac{12}{8x^4} - \frac{5X}{112x^6} \right) \right]$$

$$\alpha'' = \Delta\theta''_z = \frac{1-\nu-2\nu^2}{E_r} \times \frac{T_y}{a} \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \cdot \right.$$

$$\left. \left[4(1+x^2) \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} - 3x - x^3 \ln \left(\frac{1+x^2}{x^2} \right) + \frac{1}{x} \ln (1+x^2) \right] \right\}$$

$$\gamma'' = \Delta y'' = \frac{1-\nu-2\nu^2}{E_r} \cdot \frac{M_x}{a} \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \left[4(1+x^2) \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} \cdots \right] \right.$$

$$\left. - 3x - x^3 \ln \left(\frac{1+x^2}{x^2} \right) + \frac{1}{x} \ln (1+x^2) \right] \right\}$$

dont nous pouvons tirer une forme condensée :

$$\alpha' = \frac{M}{E_r a^2} [(1-\nu^2) A_1] = \frac{1}{E_r} \cdot \frac{M}{a^2} \cdot K_1$$

$$\beta' = \frac{N}{E_r} [(1-\nu^2) A_2] = \frac{N}{E_r} \cdot K_2$$

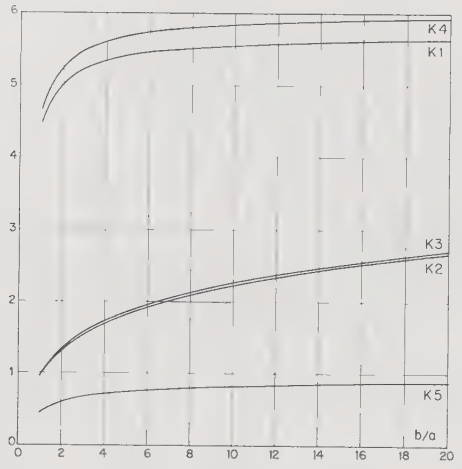
$$\gamma' = \frac{T_y}{E_r} [(1-\nu^2) A_3 + (\nu+\nu^2) A_4] = \frac{T_y}{E_r} \cdot K_3$$

$$\delta' = \frac{M_t}{E_r a^2} [A_5 + \nu A_6 - \nu^2 A_7] = \frac{1}{E_r} \cdot \frac{M_t}{a^2} \cdot K_4$$

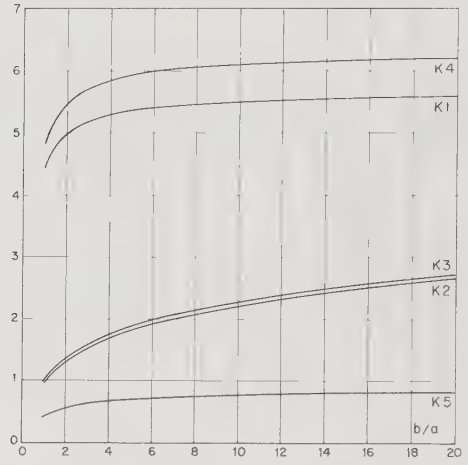
$$\alpha'' = \frac{T_y}{E_r a} [(1-\nu-2\nu^2) A_8] = \frac{1}{E_r} \cdot \frac{T_y}{a} \cdot K_5$$

$$\gamma'' = \frac{M}{E_r a} [(1-\nu-2\nu^2) A_8] = \frac{1}{E_r} \cdot \frac{M}{a} \cdot K_5$$

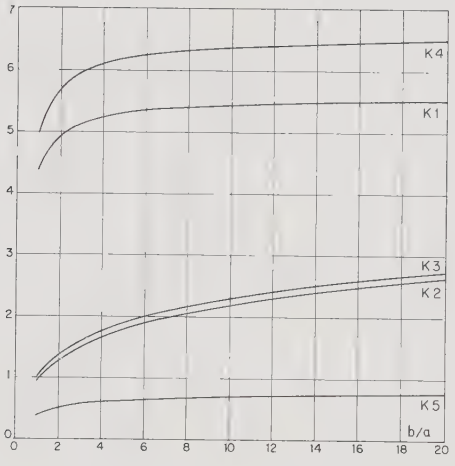
dans lesquelles les quantités de A_1, A_2, ... et A_8 ne dépendent que de x. L'intensité de la charge p est contenue dans les efforts M, N, T.



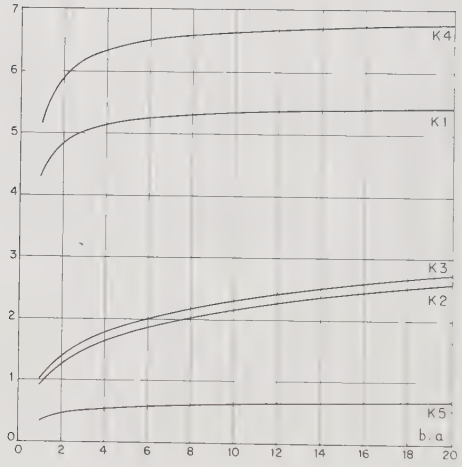
Coefficient de Poisson = 0.05



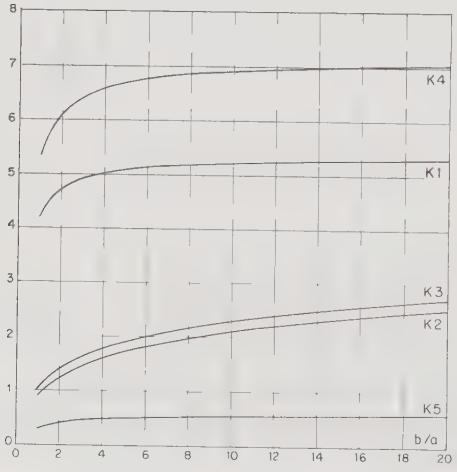
Coefficient de Poisson = 0.10



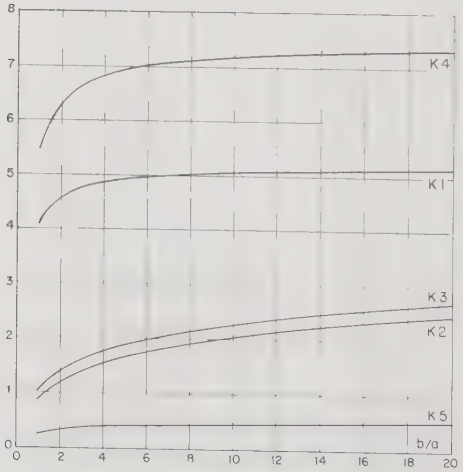
Coefficient de Poisson = 0.15



Coefficient de Poisson = 0.20



Coefficient de Poisson = 0.25



Coefficient de Poisson = 0.30

Fig. VII.1

VII.3 - COEFFICIENTS DE "VOGT"

En remplaçant les expressions entre crochets par K_i et a par e, épaisseur du barrage, nous obtenons pour les charges (forces et couples) unitaires et par l'unité de longueur les expressions suivantes :

$$\alpha' = \frac{K_1}{E_r e^2} \qquad \delta' = \frac{K_4}{E_r e^2}$$

$$\beta' = \frac{K_2}{E_r} \qquad \alpha'' = \frac{K_5}{E_r e}$$

$$\gamma' = \frac{K_3}{E_r} \qquad \gamma'' = \frac{K_5}{E_r e}$$

Les coefficients K_1, K_2, K_3, K_4 et K_5 qui sont des fonctions de ν et de x, sont connus sous le nom de "coefficients de Vogt". Leurs valeurs sont données par les abaques publiés par l'U.S.B.R.

VII.4 - TRADUCTION EN MACHINE

Ces formules ont été transcrites dans une macro-instruction du type "Function".

Nous avons contrôlé cette fonction en provoquant le calcul pour différentes valeurs de b/a et de ν et nous avons fait tracer numériquement les courbes en fonction de b/a pour une valeur donnée de ν (figure VII.1).

VII.5 - INTRODUCTION DE LA FORMULATION MATRICIELLE

Les formules précédemment montrées suffisent pour le calcul des ouvrages jusqu'à 3 ajustements. Ces formules sont généralement utilisées sous la forme donnée par l'U.S. Bureau of Reclamation

Mais, si on veut dépasser le nombre de 3 ajustements, il convient de reformuler le problème de façon matricielle pour mieux mettre en évidence la nature des termes nouveaux, et également pour faciliter l'exploitation de la matrice de déformabilité ainsi complétée. Par conséquent, nous ordonnons les densités des forces et des couples, les translations et les rotations de la façon qui a été expliquée précédemment (voir § IV.3).

De cette façon, tenant compte de la convention d'axes, dans les axes intrinsèques de la fondation, la relation déplacement - densité linéaire d'effort est exprimée par la matrice $[F_f]$, appelée la matrice de déformabilité de la fondation.

VII.5.1 - Matrice de déformabilité de la fondation

La matrice de déformabilité (flexibilité) intrinsèque de fondation dans ses axes est notée $[F_f]$. L'expression de $[F_f]$ est donnée ci-dessous.

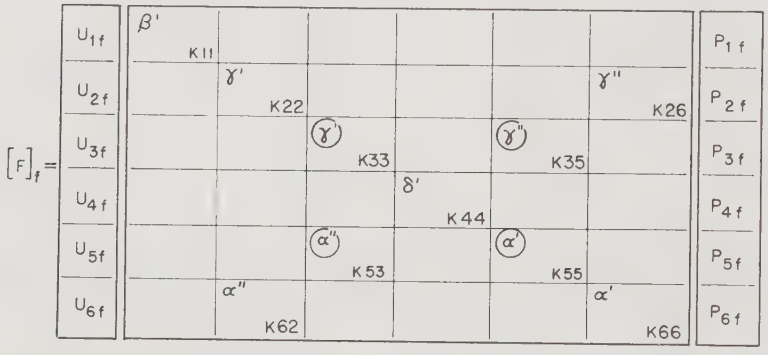
Il convient de faire quelques remarques sur cette matrice :

- cette matrice est symétrique par rapport à la diagonale principale, car elle est associée à une forme quadratique (théorème de la réciprocité) ;

- opérant sur la densité linéaire d'effort, elle donne des déplacements ;

- tous ses coefficients n'ont pas la même dimension (matrice non homogène), puisque ni le vecteur multiplié ni le vecteur produit ne sont homogènes.

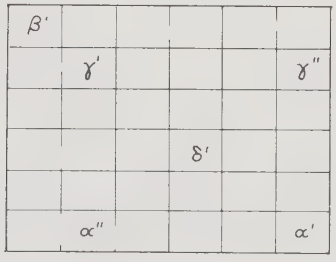
Matrice de déformabilité intrinsèque de la fondation $[F_f]$



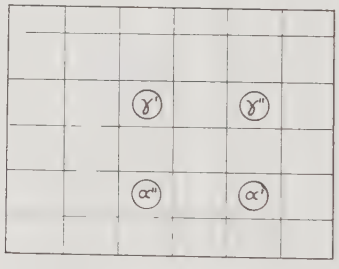
VII.5.2 - Termes complémentaires

Dès qu'on se propose de réaliser plus de 3 ajustements, il est nécessaire d'avoir une matrice intrinsèque $[F_f]$ plus complète que celle donnée par les termes de Vogt précédemment présentés. Ces deux cas sont représentés ci-dessous.

Matrice telle qu'elle peut être constituée avec les coefficients de Vogt



Termes nouveaux nécessairement ajoutés ou supposés nuls



Dans le cas d'une fondation du barrage-voûte, l'U.S.B.R. a choisi pour x ($x = b/a$) des valeurs distinctes selon le type de charge considérée, sans donner beaucoup d'explications sur ces choix.

Par exemple, pour les forces tangentes à la fondation et perpendiculaires à sa grande dimension, l'U.S.B.R. estime que tout le rectangle (b, a) résiste. Les termes correspondants sont dans la seconde colonne de la matrice.

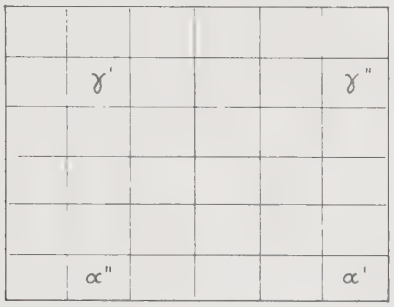
Ceci paraît exact, car la charge correspondante est la charge radiale.

D'autre part, les termes de la même colonne doivent être calculés avec le même x, car il s'agit du même type de charge, et ce sont les propriétés de symétrie de la charge par rapport à la fondation qui entrent manifestement en jeu.

De plus, la matrice étant symétrique, lorsqu'une colonne a plus d'un terme (p = 2 termes), ce ne sont plus p = 2 mais 2 p = 4 coefficients qui doivent être calculés avec le même x. Ces termes constituent dans la matrice les 4 sommets d'un carré.

Dans la matrice ci-dessous sont montrés les termes calculés avec x = b/a.

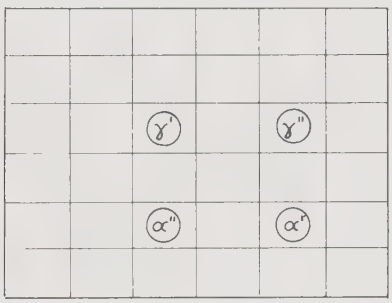
Les termes calculés avec x = b/a



Pour les charges appliquées dans le plan de la fondation (comme les précédentes), mais parallèles à la plus grande dimension a, on échange le rôle de a et b, et on suppose qu'une moitié seulement de la fondation résiste. On remplace donc a par b/2 et b par a, car il s'agit de la charge verticale dans la matrice. De cette façon, nous obtenons le second carré dont les termes sont calculés avec x = a/(b/2).

Dans la matrice ci-dessous sont montrés les termes calculés avec x = a/(b/2).

Les termes calculés avec x = a/(b/2)



Pour les charges perpendiculaires à la surface de fondation, il est acceptable de prendre x = (b/2)/a puisqu'on ne considère la charge totale que pour la composante radiale de la charge.

Ainsi, β' et δ' sont calculés avec x = (b/2)/a.

	P_{1a}	P_{2a}	P_{3a}	P_{4a}	P_{5a}	P_{6a}
U_{1a}	$\beta' \cos^3 \bar{\Psi} + \gamma' \sin^2 \bar{\Psi} \cos \bar{\Psi}$	0	$(\beta' - \gamma') \sin \bar{\Psi} \cos^2 \bar{\Psi}$	0	$-\gamma' \sin \bar{\Psi} \cos \bar{\Psi}$	0
U_{2a}	0	$\gamma' \cos \bar{\Psi}$	0	$-\delta'' \sin \bar{\Psi} \cos \bar{\Psi}$	0	$\delta'' \cos^2 \bar{\Psi}$
U_{3a}	$(\beta' - \gamma') \sin \bar{\Psi} \cos^2 \bar{\Psi}$	0	$\beta \sin^2 \bar{\Psi} \cos \bar{\Psi} + \gamma' \cos^3 \bar{\Psi}$	0	$\gamma' \cos^2 \bar{\Psi}$	0
U_{4a}	0	$-\alpha'' \sin \bar{\Psi} \cos \bar{\Psi}$	0	$\delta' \cos^3 \bar{\Psi} + \alpha' \sin^2 \bar{\Psi} \cos \bar{\Psi}$	0	$(\delta' - \alpha') \sin \bar{\Psi} \cos^2 \bar{\Psi}$
U_{5a}	$-\alpha' \sin \bar{\Psi} \cos \bar{\Psi}$	0	$\alpha' \cos^2 \bar{\Psi}$	0	$\alpha' \cos \bar{\Psi}$	0
U_{6a}	0	$\alpha' \cos^2 \bar{\Psi}$	0	$(\delta' - \alpha') \sin \bar{\Psi} \cos^2 \bar{\Psi}$	0	$\delta' \sin^2 \bar{\Psi} \cos \bar{\Psi} + \alpha' \cos^3 \bar{\Psi}$

Expression de la matrice $[F_{fa}]$

	P_{1c}	P_{2c}	P_{3c}	P_{4c}	P_{5c}	P_{6c}
U_{1c}	$\gamma' \sin^3 \bar{\Psi} + \beta' \sin \bar{\Psi} \cos^2 \bar{\Psi}$	0	$(\beta' - \gamma') \sin^2 \bar{\Psi} \cos \bar{\Psi}$	0	$-\gamma' \sin^2 \bar{\Psi}$	0
U_{2c}	0	$\gamma' \sin \bar{\Psi}$	0	$-\gamma'' \sin \bar{\Psi}$	0	$\gamma'' \sin \bar{\Psi} \cos \bar{\Psi}$
U_{3c}	$(\beta' - \gamma') \sin^2 \bar{\Psi} \cos \bar{\Psi}$	0	$\beta' \sin^3 \bar{\Psi} + \gamma' \sin \bar{\Psi} \cos^2 \bar{\Psi}$	0	$\gamma'' \sin \bar{\Psi} \cos \bar{\Psi}$	0
U_{4c}	0	$-\alpha'' \sin^2 \bar{\Psi}$	0	$\alpha' \sin^3 \bar{\Psi} + \delta' \sin \bar{\Psi} \cos^2 \bar{\Psi}$	0	$(\delta' - \alpha') \sin^2 \bar{\Psi} \cos \bar{\Psi}$
U_{5c}	$-\alpha' \sin^2 \bar{\Psi}$	0	$\alpha' \sin \bar{\Psi} \cos \bar{\Psi}$	0	$\alpha' \sin \bar{\Psi}$	0
U_{6c}	0	$\alpha'' \sin \bar{\Psi} \cos \bar{\Psi}$	0	$(\delta' - \alpha') \sin \bar{\Psi} \cos \bar{\Psi}$	0	$\delta' \sin^3 \bar{\Psi} + \alpha' \sin \bar{\Psi} \cos \bar{\Psi}$

Expression de la matrice $[F_{fc}]$

VII.6 - DÉFORMABILITÉ DE L'ÉLÉMENT UNITAIRE

Les formules qui donnent la déformabilité de la fondation telle qu'elles sont données par l'U.S.B.R. s'obtiennent en appliquant les opérateurs A_{ij} sur la matrice intrinsèque à deux systèmes d'axes dont les sommets sont confondus.

Dans le cas des axes intrinsèques d'arc, en remarquant que la densité de charge sur la surface inclinée de la fondation est cos $\bar{\psi}$ fois celle de la densité normale de charge sur l'arc, nous obtenons la matrice $[F_{fa}]$ dont l'expression est donnée ci-dessous.

Dans le cas des axes intrinsèques de console, en remarquant également que la densité de charge sur la surface inclinée est sin $\bar{\psi}$ fois celle de la valeur normale sur la console, nous obtenons la matrice $[F_{fc}]$ dont l'expression est donnée ci-dessous.

Le développement de ces deux matrices donne respectivement les quantités qui correspondent à la déformation de l'élément unitaire horizontal et vertical.

Chapitre VIII

Résultats

La mise au point du programme de calcul de barrage-voûte n'a laissé que six mois environ pour son exploitation. Deux voûtes ont été ainsi calculées : celle d'un barrage ancien (T) dont le modèle en plâtre avait été réalisé à Chatou en 1960 et celle d'un barrage-voûte en projet, celui de La Barthe.

Les exploitations du code ont été faites pour ces deux voûtes en gardant en vue les points suivants :

a) l'estimation de la qualité des solutions obtenues ;

b) l'optimalisation du nombre des ajustements.

VIII.1 - QUALITÉ DES SOLUTIONS OBTENUES

Au moment où les exploitations ont commencé, le programme était formellement au point ; autrement dit, les différents stades de la formation de la solution évaluaient correctement dans l'ordinateur et fournissaient des résultats intermédiaires complètement satisfaisants tant au cours d'un examen propre qu'au cours d'une comparaison avec le Code de l'E.D.F. Ce dernier, rappelons-le, a été formulé et programmé de façon indépendante.

Les derniers efforts de mise au point formelle ont abouti en même temps à un début d'estimation de la qualité de la solution : en effet, le champ ajustant une fois produit, établit dans [arc] et [console] des efforts, et partant des contraintes et des déplacements. L'égalité des déplacements de [arc] et [console] est évidemment une preuve de la cohérence de la formulation et surtout de la programmation.

A ce point de vue, on peut dire que quel que soit le *nombre d'ajustements réalisé*, l'égalité des composantes du déplacement ajustées est obtenu avec un haut degré de précision.

Par exemple, dans le cas le plus défavorable, qui est celui du déplacement du milieu de la crête, de l'ordre de 3 à 5 centimètres lorsque le module d'Young est 200 000 kg/cm², l'ajustement est réalisé à 1 micron près pour le déplacement, et à 1 micro-radian près pour les rotations. Ceci ne suffit pas pour être assuré de la qualité de la solution et montre seulement que la pose, la résolution et la substitution de la solution dans le système à résoudre sont correctes.

Une autre série d'exploitations a permis d'aller un peu plus loin dans l'estimation de la qualité. Le code permet de traiter le cas d'une voûte complètement non-symétrique tant au point de vue élastique que géométrique. Si nous envisageons une situation géométriquement et élastiquement symétrique, le résultat doit avoir la même propriété aux erreurs de traitement numérique près. Ainsi, nous discernons directement l'amplitude de ce "bruit numérique" dû à l'imperfection de l'ordinateur quand il exécute les opérations du programme.

On peut dire que la symétrie de la solution est obtenu à 10^{-4} près pour les déplacements et à 10^{-6} près pour les efforts et, partant, les contraintes. Ces résultats seront très améliorés lorsque le code aura été transcrit sur l'ordinateur C.D.C. 6600 qui opère

avec 14 chiffres significatifs en simple précision et avec 28 chiffres significatifs en double précision (sur IBM 7 094, 8 chiffres en simple et 16 chiffres en double précision).

VIII.2 - OPTIMALISATION DU NOMBRE D'AJUSTEMENTS

La "Trial Load Method" qui a été la méthode la plus employée par les ingénieurs, est conduite par relaxation à la machine de bureau. Elle suppose donc un calculateur expérimenté. Le recours à une procédure entièrement automatique est encore évité par l'organisation qui a inventé, mis au point et abondamment utilisé la T.L.A., à savoir le Bureau of Reclamation. Cette réserve est justifiée par un certain nombre de points que nous évoquons brièvement.

D'abord, la théorie de Love - Kirchhoff est imparfaite dans la mesure où elle ne permet pas de prise en compte des efforts tranchants.

Ensuite, l'hypothèse de partage, qui généralement est sous-entendue, n'est elle-même pas entièrement satisfaisante, parce que l'analyse de la déformation fait apparaître des quantités comme :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)$$

dont l'intégration le long d'un élément α = Cte n'est pas réalisable dans la méthode sans l'hypothèse du partage.

D'autre part, le Trial Load peut difficilement prendre en compte les conditions suivantes qui sont envisagées par la théorie des coques, à savoir :

a) l'identité à zéro de l'effort de type moment fléchissant d'axe radial ;

b) l'égalité des contraintes de cisaillement sur 2 facettes perpendiculaires, conditions exigées par la théorie de l'élasticité.

De toute façon, notre code fournit les valeurs suivantes :

a) moment fléchissant d'axe radial ;

b) contraintes calculées sur les parements avec 3 hypothèses qui satisfont toutes les trois à la théorie de l'élasticité, à savoir : le cisaillement d'arcs et de consoles, tous deux égaux au cisaillement calculé d'arc, de console ou à la demi-somme de ces derniers.

Une question assez délicate posée à propos des méthodes par ajustements est celle du nombre des ajustements.

Pour des raisons dues, semble-t-il, à l'emploi des axes de la résistance des matériaux, l'U.S.B.R. a longtemps réalisé 3 ajustements : 2 composantes de translation et 1 composante de rotation.

La généralisation faite par M. Beaujoint a consisté à augmenter le nombre des ajustements.

Notre code, influencé par ces auteurs, génère les coefficients d'influence nécessaires à la réalisation de 6 ajustements (3 composantes de translation et 3 composantes de rotation).

La série principale d'exploitation du programme dont les résultats sont donnés a donc abouti à comparer une série de 5 calculs, à savoir :

1 ajustement	1 composante de translation normale à la voûte ;
3 ajustements	2 composantes de translation : normale à la voûte et tangentielle horizontale, et 1 composante de rotation autour de l'axe tangent aux lignes de pente de la voûte ;
4 ajustements	3 composantes de translation : normale à la voûte, tangentielle horizontale et tangente aux lignes de pente, et 1 composante de rotation autour de l'axe tangent aux lignes de pente de la voûte ;
5 ajustements	toutes les composantes du déplacement sauf la rotation autour de l'axe normal à la voûte ;
6 ajustements	toutes les composantes du déplacement,

et en prenant comme cas de charge la poussée de la retenue. Nous donnons une présentation sommaire des résultats de ces calculs sur les figures VIII.1 à VIII.5.

Une comparaison entre les contraintes principales de première espèce et entre les trois composantes des déplacements est donnée sur les figures VIII.6 à VIII.12. Il paraît très nettement qu'au fur et à mesure que les différentes composantes sont ajustées, le champ des déplacements se stabilise jusqu'à et y compris les 4 ajustements. Les résultats des 5 et 6 ajustements sont assez décevants et il n'y a pas de convergence lorsque les 6 ajustements sont réalisés bien que, comme nous venons de dire, la qualité numérique de l'ajustement ait toujours été très bonne. Il en est de même pour les contraintes.

L'optimum du nombre d'ajustements sans procédure spéciale est donc 4. Nous entendons par des procédures spéciales, des calculs cherchant par les moyens quelconques à itérer sur une solution d'ajustement pour la rapprocher d'une solution élastiquement parfaite. Un exemple de procédure spéciale pourrait être de résoudre aux moindres carrés le système d'équations surabondantes constitué par :

a) les conditions d'égalité des déplacements,

b) les conditions de nullité des moments d'axe radial,

c) les conditions d'égalité de cisaillement.

VIII.3 - COMPARAISON AVEC UN MODÈLE

La géométrie de (T) telle que nous l'avons prise est proche du modèle en plâtre réalisé en 1960, mais cette identité n'est pas complète parce que d'une part nous n'avons pas disposé des mesures exactes du modèle, et d'autre part les évacuateurs de crue ne sont pas pris en compte dans le calcul.

Nous avons fait des calculs sur la géométrie approchée du barrage (T) en supposant de plus l'égalité des modules d'Young de la voûte et de la fondation. Les caractéristiques principales du barrage (T) sont :

Hauteur maximale	90 m
Longueur développée en couronnement	120 m
Rayon amont en couronnement	71 m
Epaisseur maximale en crête	1,50 m
Epaisseur maximale en clé	2,43 m
Epaisseur maximale aux naissances	4,20 m.

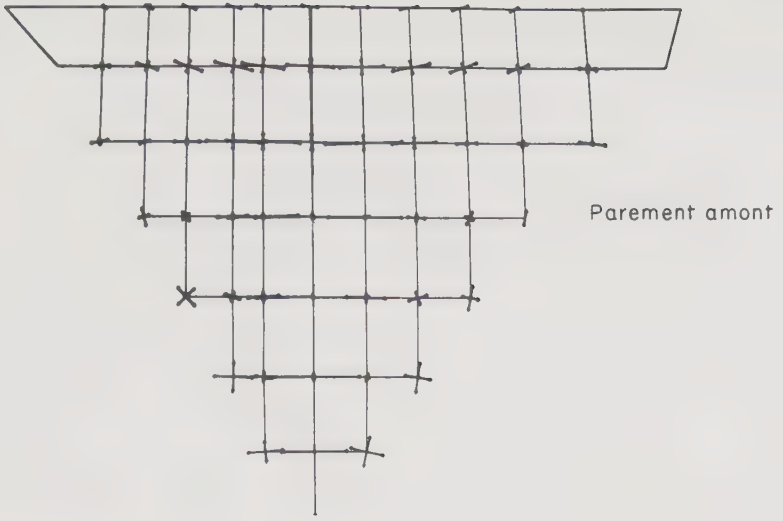
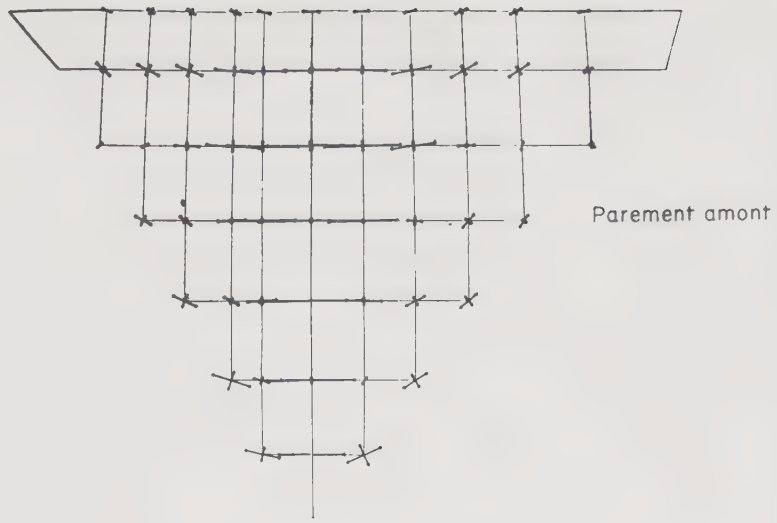
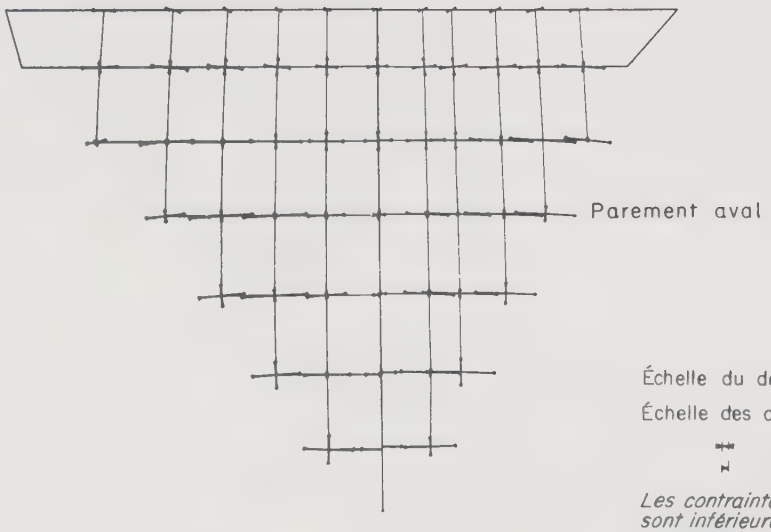
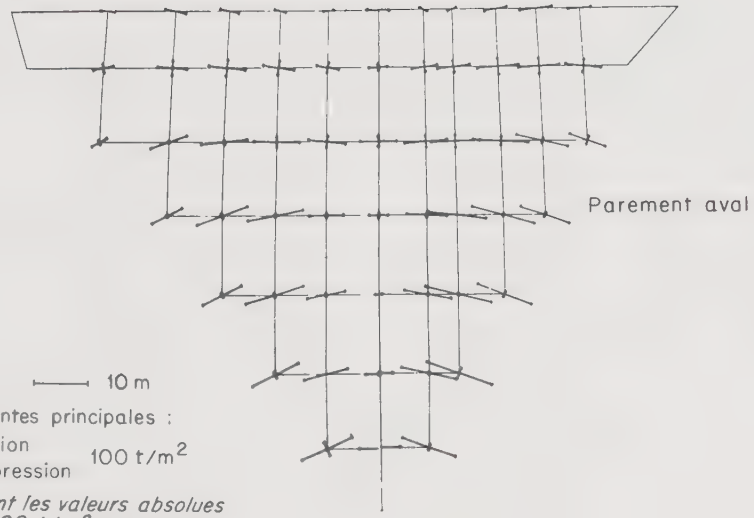


Figure VIII.1 - Ajustement radial







Échelle du dessin ⟷ 10 m

Échelle des contraintes principales :

traction
compression
100 t/m²

Les contraintes dont les valeurs absolues sont inférieures à 20 t/m² ne sont pas représentées.

Figure VIII.2 - 3 Ajustements

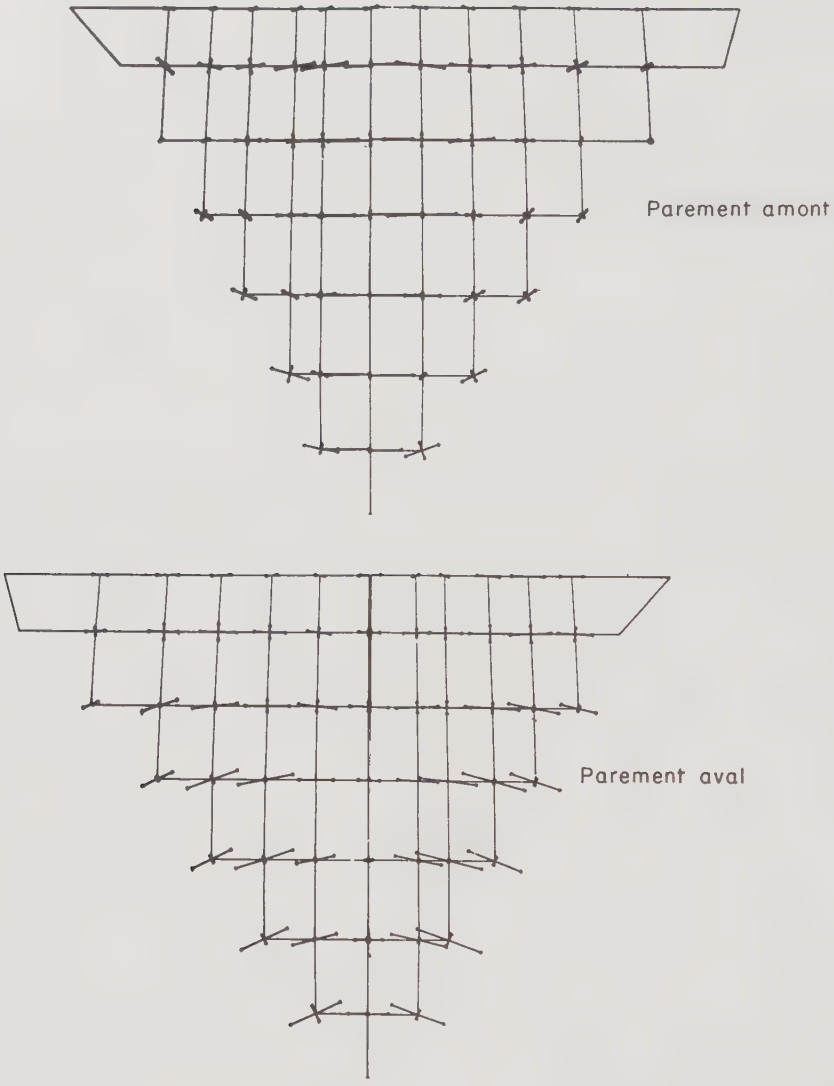
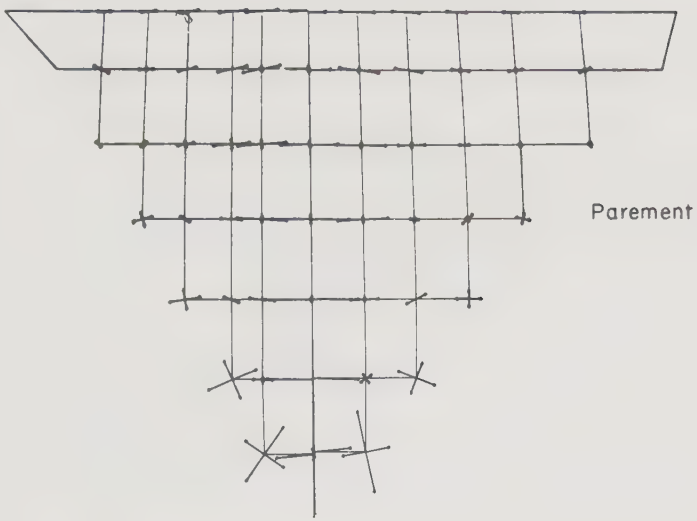
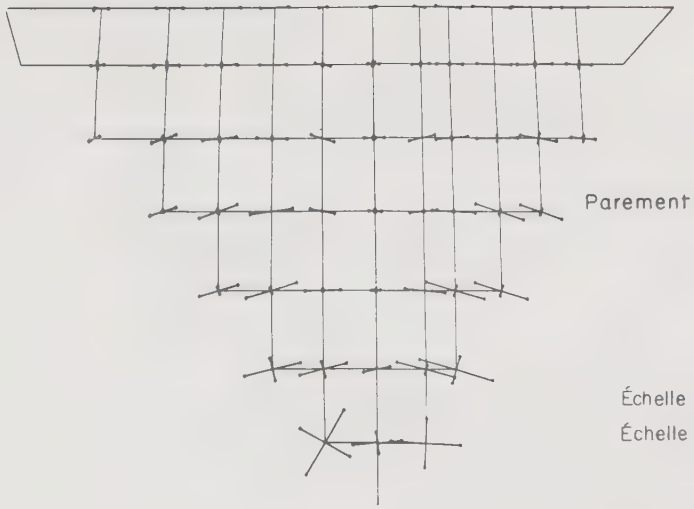


Figure VIII.3 - 4 Ajustements





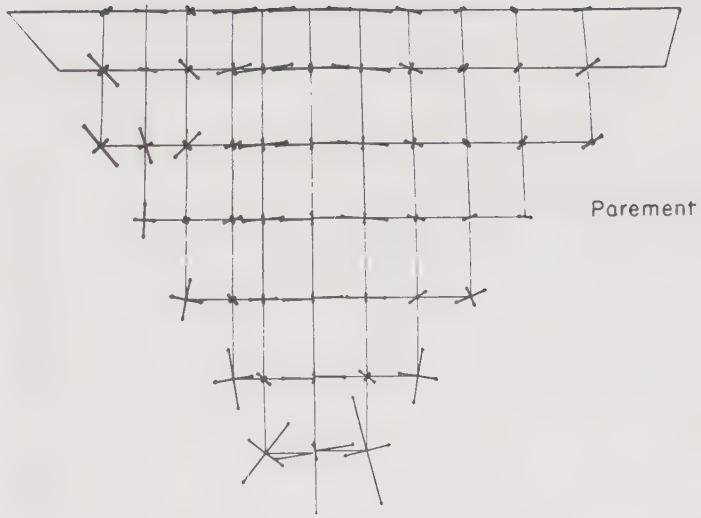
Échelle du dessin ⟵⟶ 10 m

Échelle des contraintes principales :

traction
compression
100 t/m²

Les contraintes dont les valeurs absolues sont inférieures à 20 t/m² ne sont pas représentées.

Figure VIII. 4 - 5 Ajustements



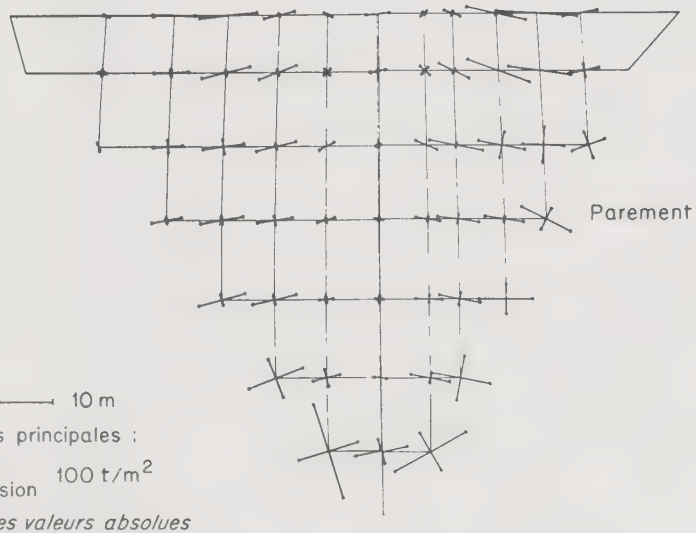


Figure VIII. 5 - 6 Ajustements

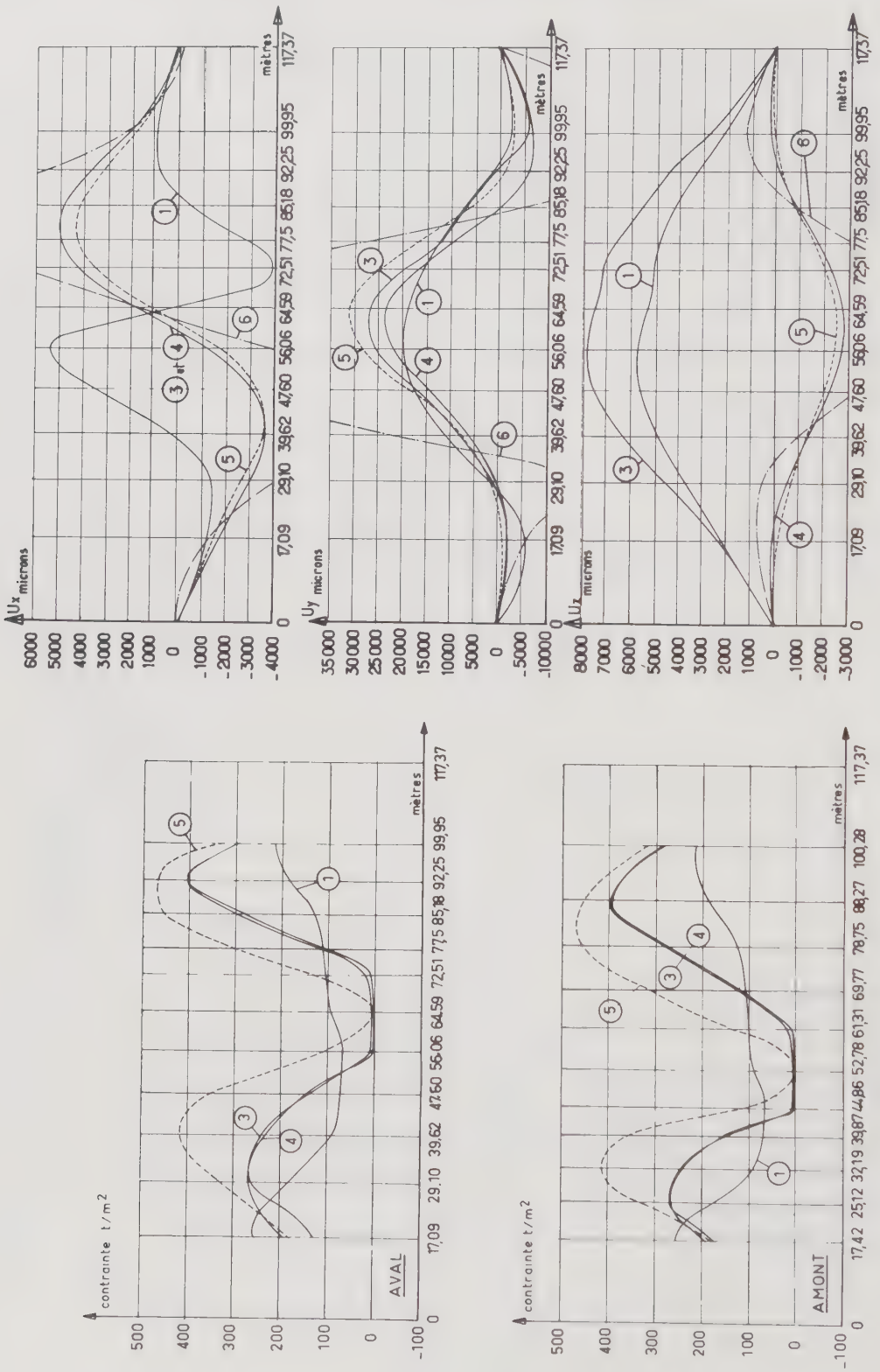
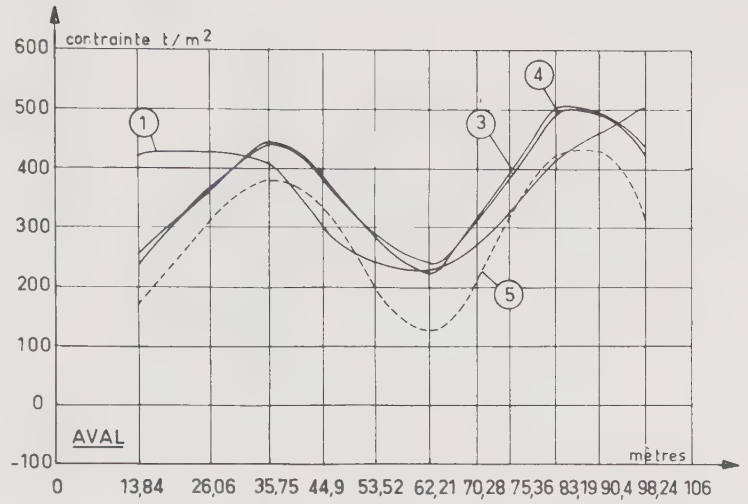
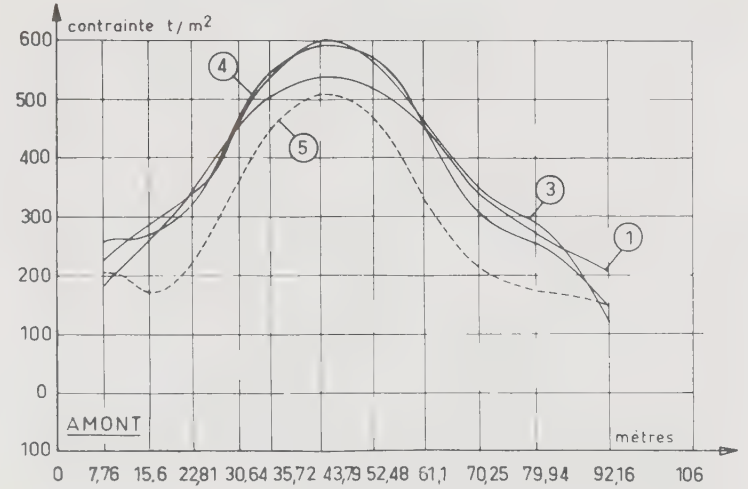
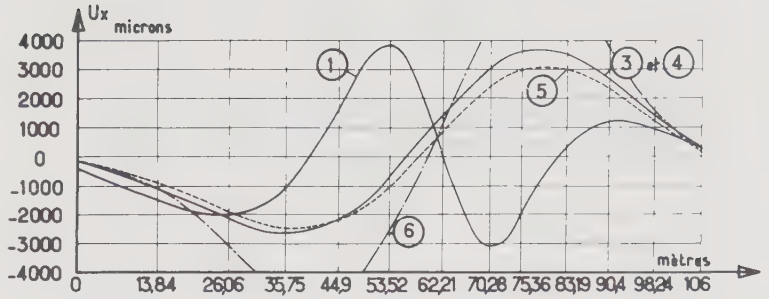


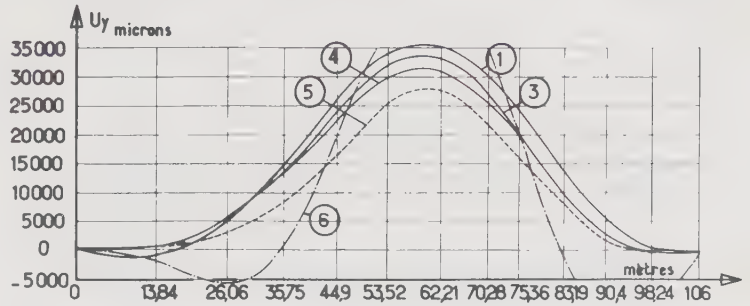
Figure VIII, 6 - Contraintes et déplacements de l'arc 1

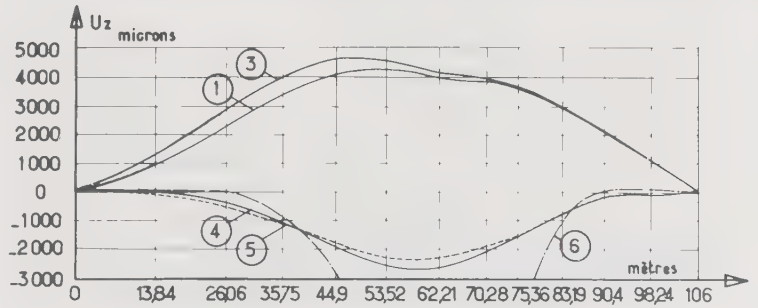




ARC 2







ARC 2

Figure VIII.7 - Contraintes et déplacements de l'arc 2

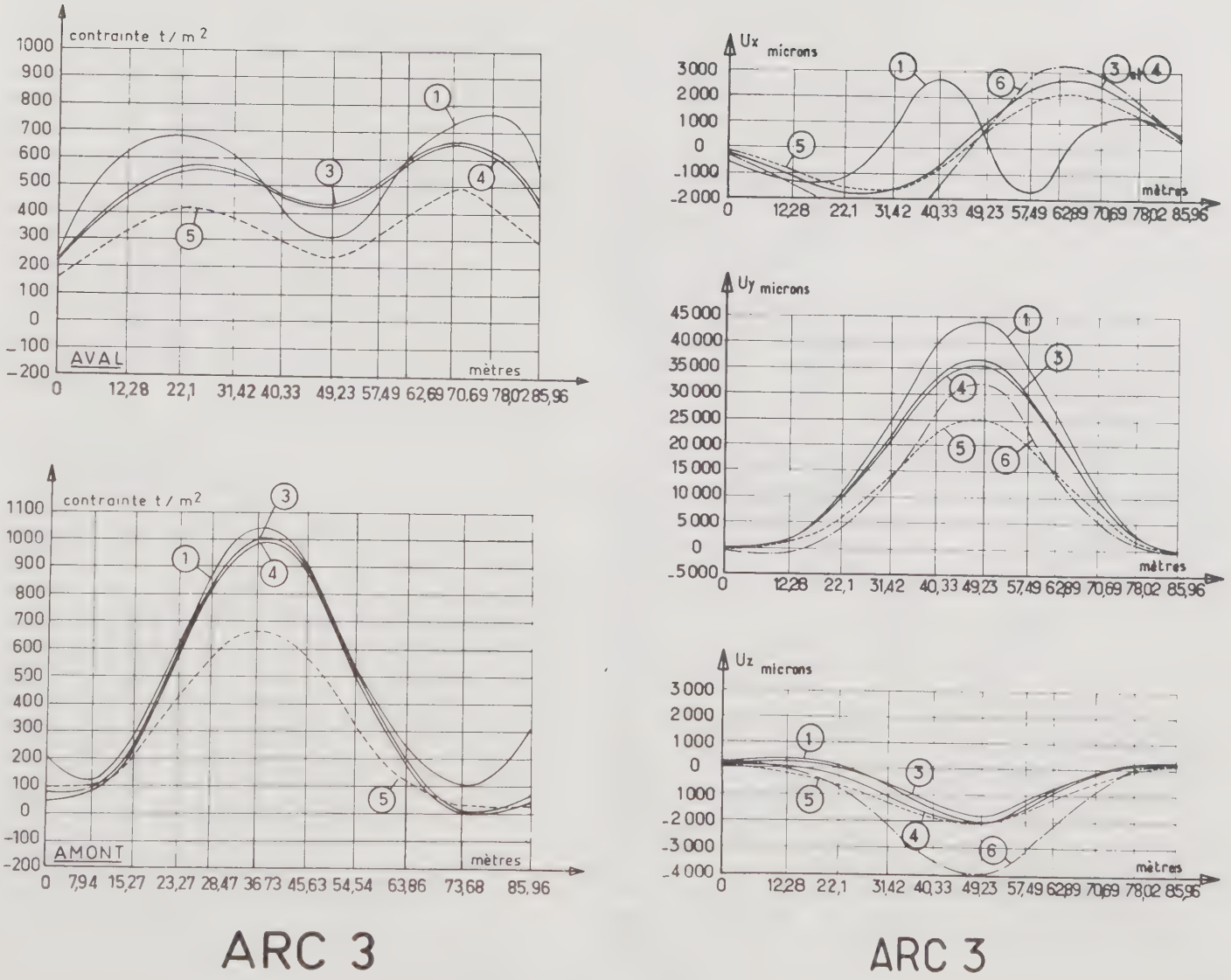
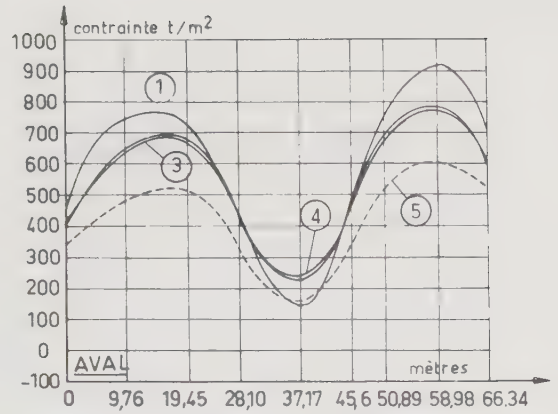
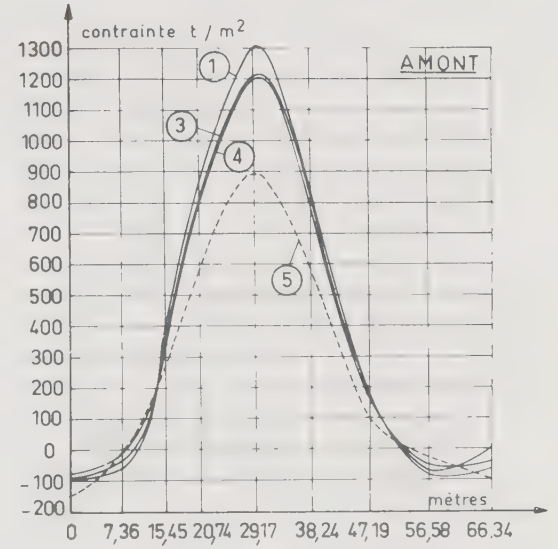
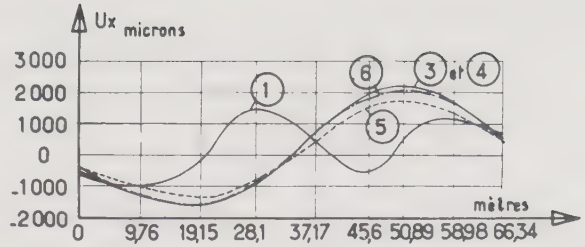


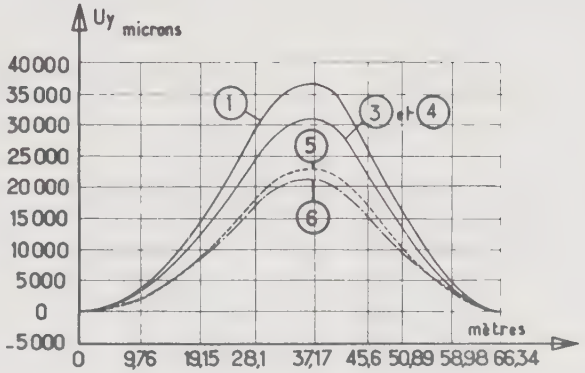
Figure VIII. 8 - Contraintes et déplacements de l'arc 3

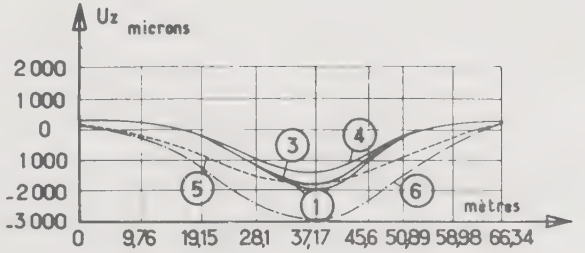




ARC 4







ARC 4

Figure VIII. 9 - Contraintes et déplacements de l'arc 4

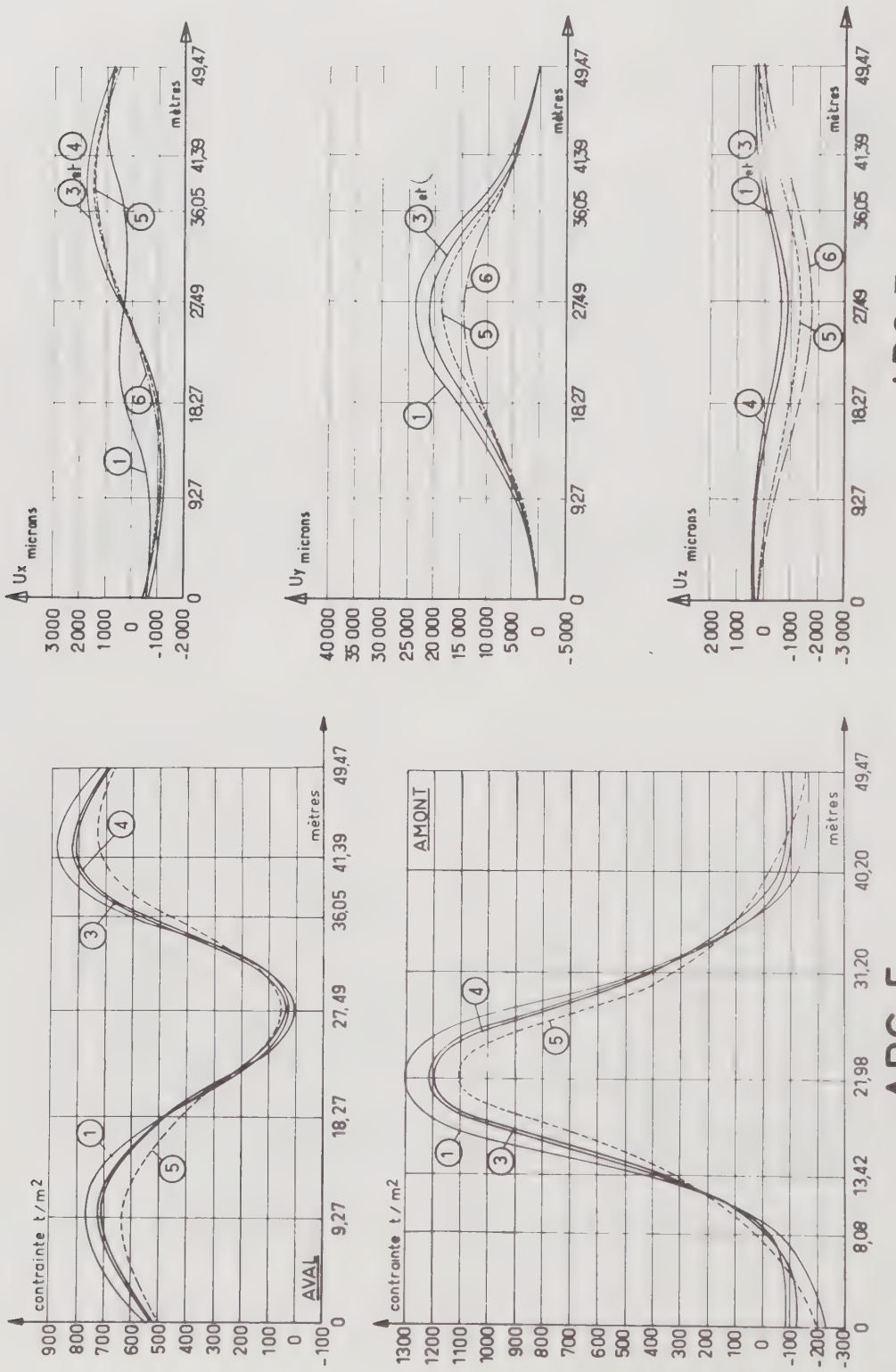


Figure VIII.10 - Contraintes et déplacements de l'arc 5

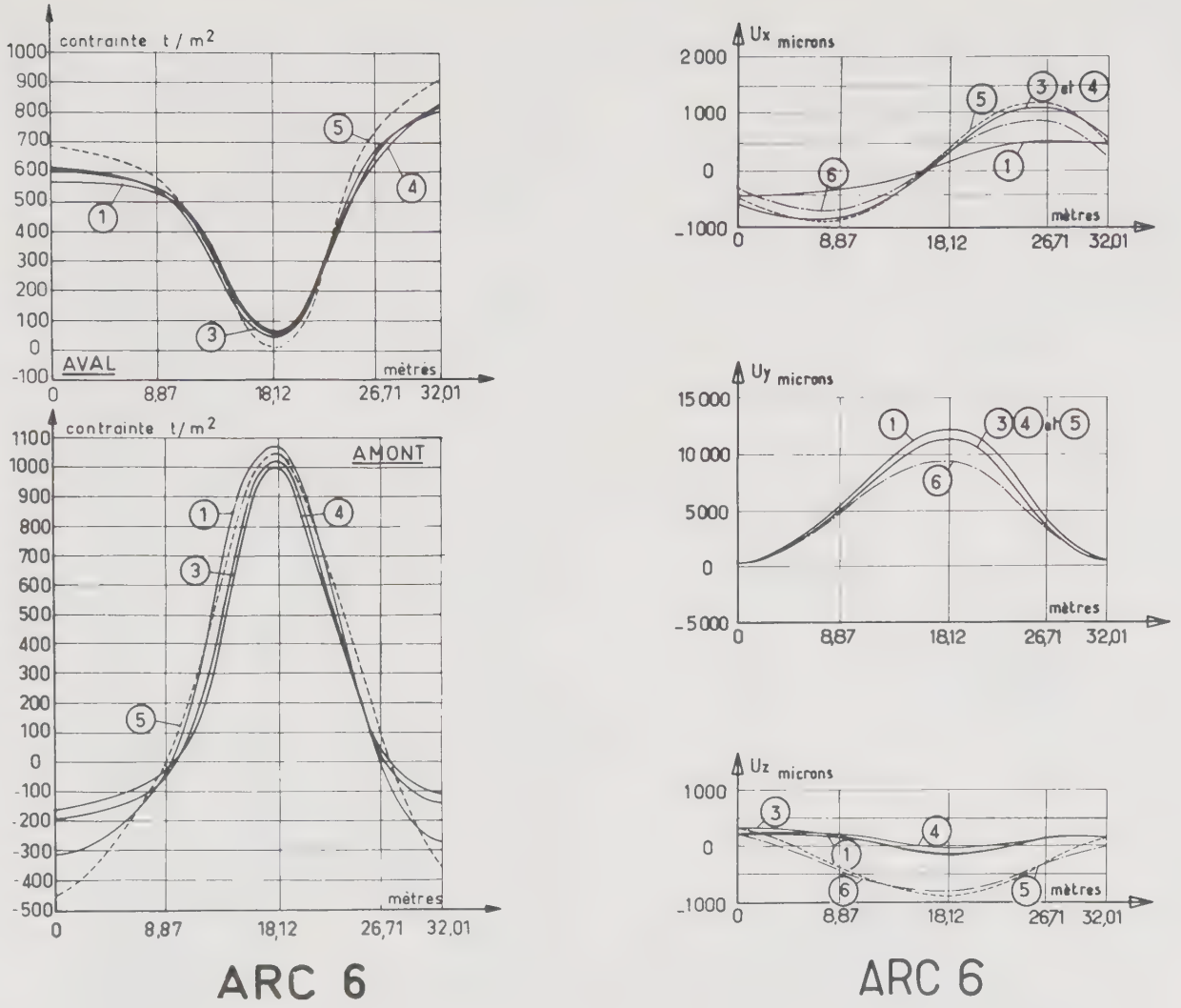


Figure VIII.11 - Contraintes et déplacements de l'arc 6

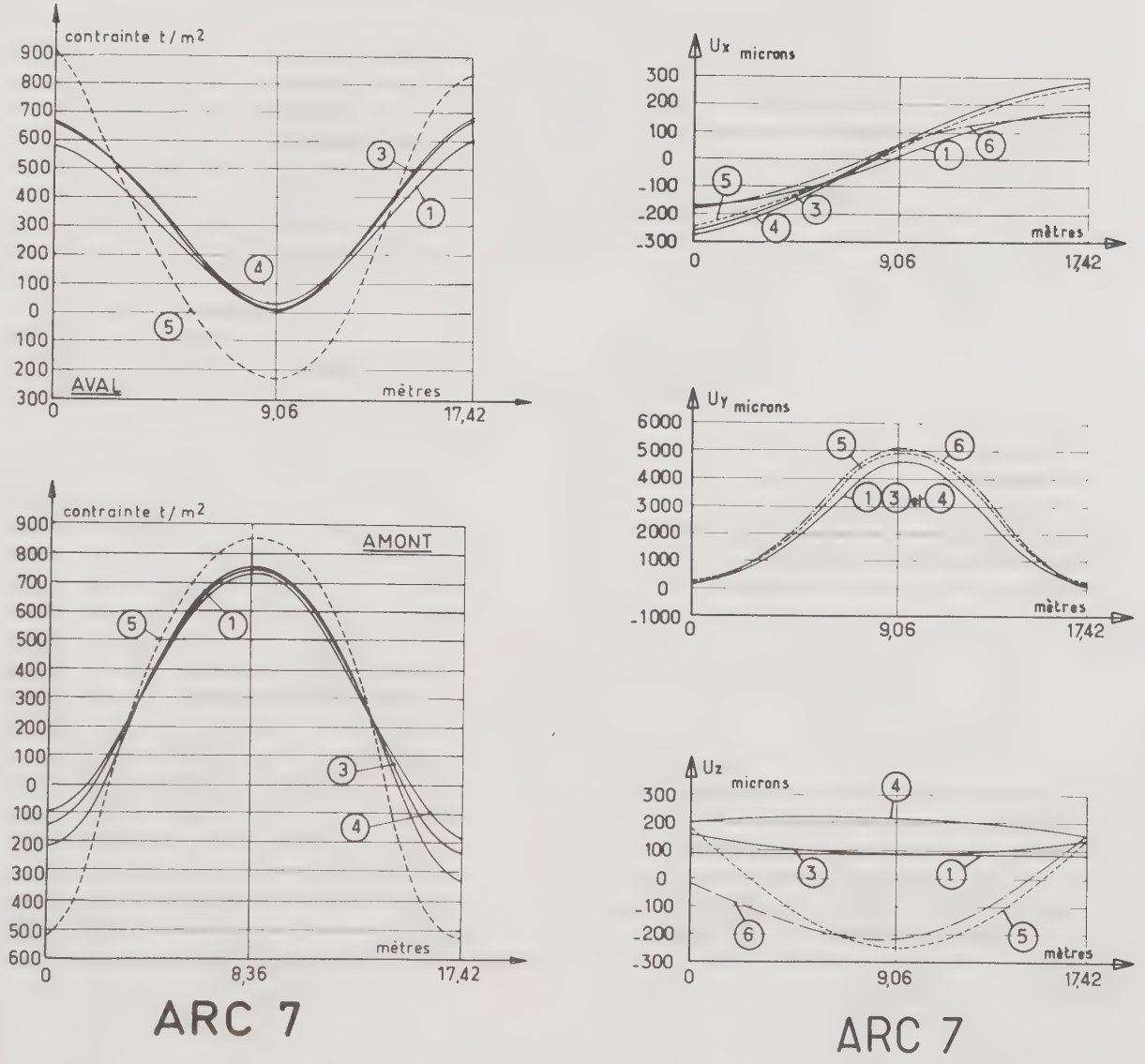
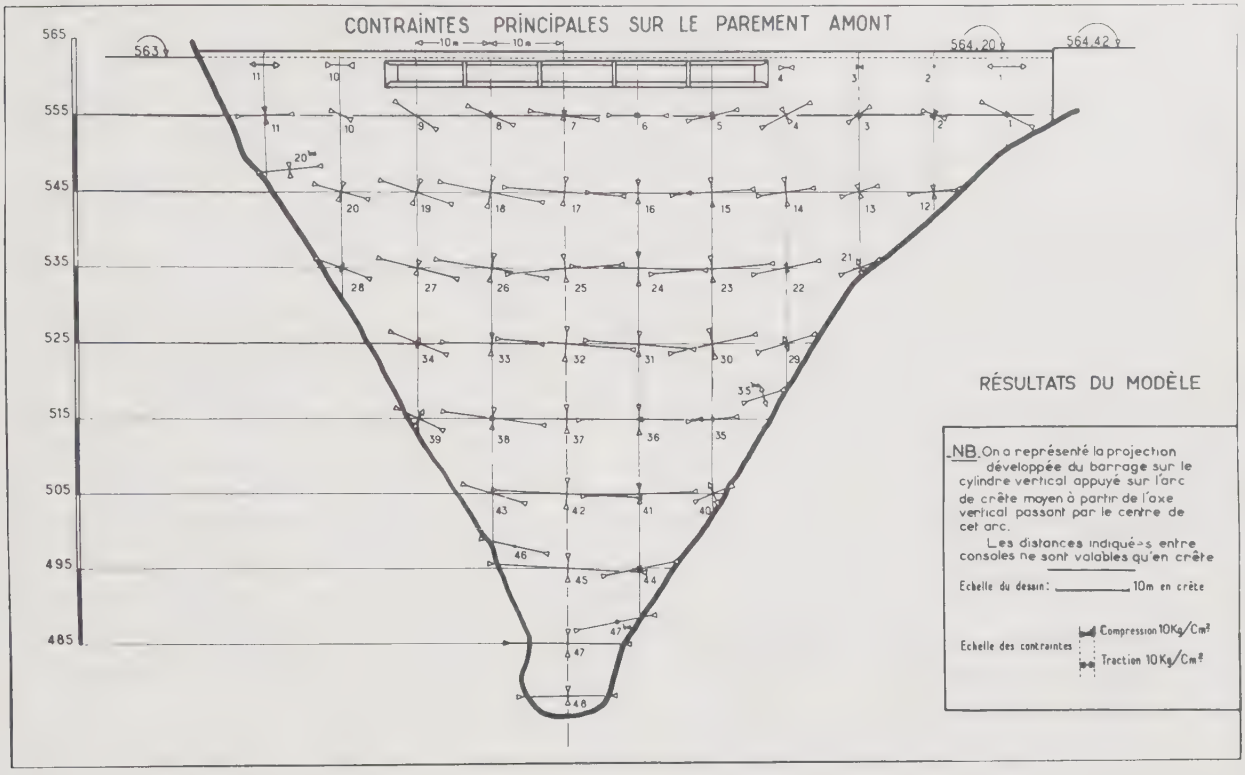


Figure VIII. 12 - Contraintes et déplacements de l'arc 7



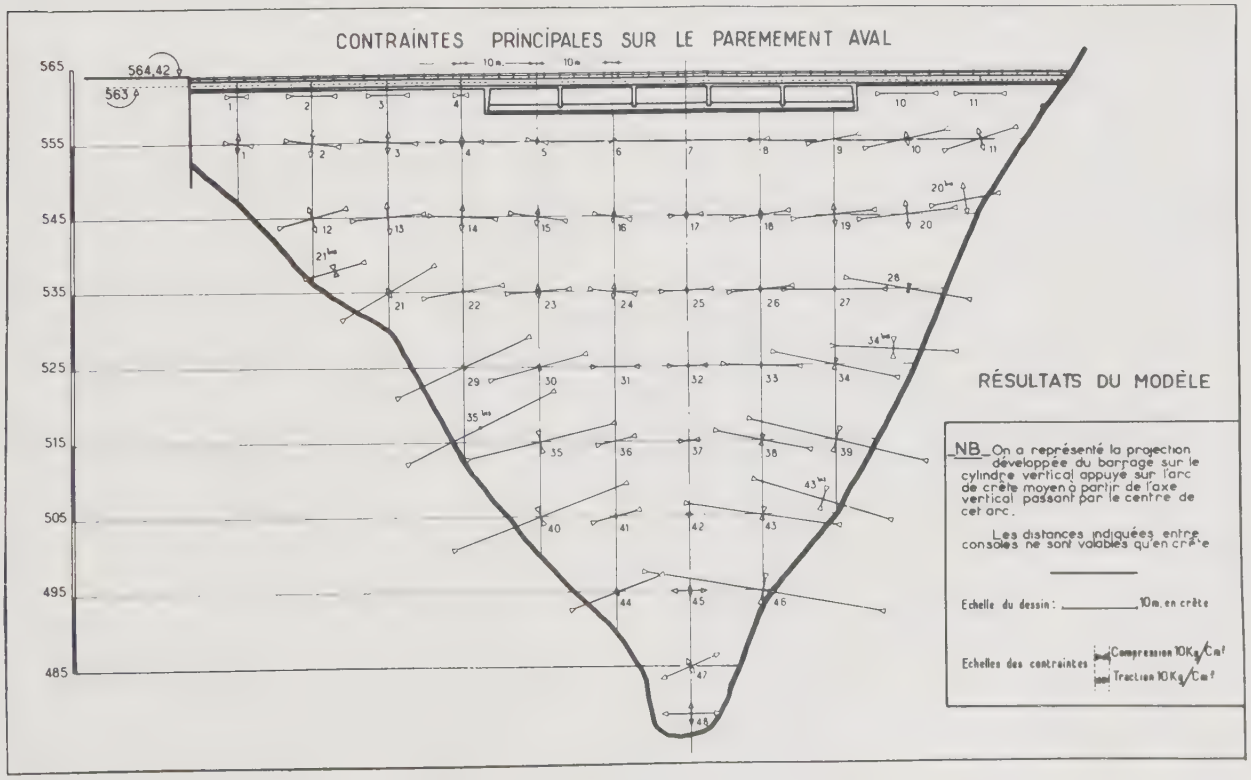


Figure VIII. 13 - Résultats du modèle

La comparaison est très bonne pour ce qui est des isostatiques plongeant vers le bas en aval et remontant en amont (figure VIII.13).

Le point de désaccord le plus net est observé en aval inférieur. Mais l'étroitesse de la vallée à ce niveau donne au problème un aspect tridimensionnel et rend la solution très sensible aux petites différences de géométrie entre modèle et calcul.

D'autre part, les contraintes très élevées que donne le modèle sont surprenantes. Même la vérification globale d'équilibre a montré une légère surévaluation des efforts de fondation.

En tout cas, le projeteur prévoyait une contrainte maximale de 1 200 t/m^2 qui est bien retrouvée par le calcul.

Dans le reste du modèle, la comparaison est satisfaisante, sans plus.

VIII.4 - FONDATION PLUS DÉFORMABLE

La réalisation de modèles à fondation plus déformable que la vôute est une technique délicate qui n'a jamais été réalisée, du moins à notre connaissance.

Le calcul a une souplesse très grande qui permet d'obtenir des ordres de grandeurs.

Nous avons fait deux exploitations du code en supposant que le module d'Young moyen de la fondation était $1/5^e$ et $1/10^e$ de celui du béton de l'ouvrage (Figures VIII.14 et VIII.15)

- Les isostatiques se cassent au voisinage des fondations ;

- Les valeurs extrémales des compressions et tractions ne changent pas sensiblement, bien que dans certains points de voisinage de la fondation les contraintes augmentent.

VIII.5 - EFFET DE POISSON ET CHARGEMENT AUX APPUIS

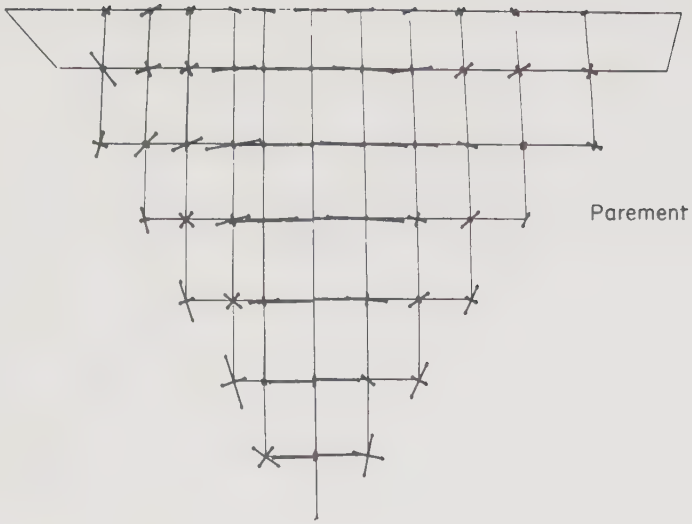
Nous avons pu comparer les résultats de deux calculs à 3 ajustements dont l'un tenait compte de l'effet de Poisson et du chargement aux nœuds d'appui tandis que l'autre les négligeait, toutes les autres hypothèses étant identiques.

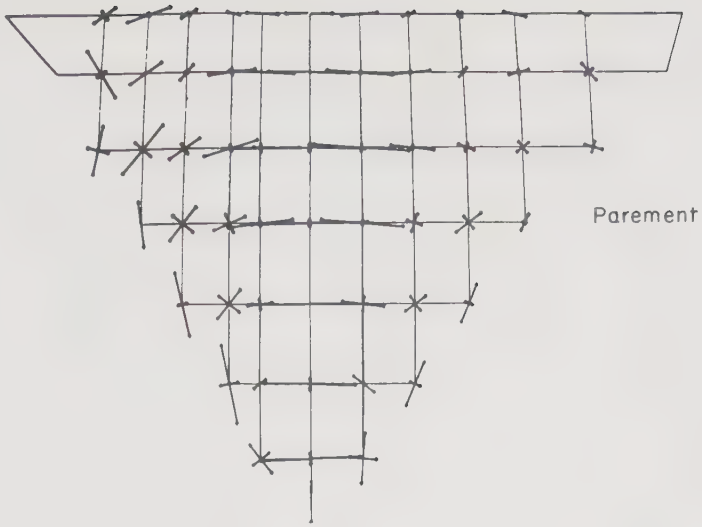
La géométrie de l'ouvrage était celle de La Barthe.

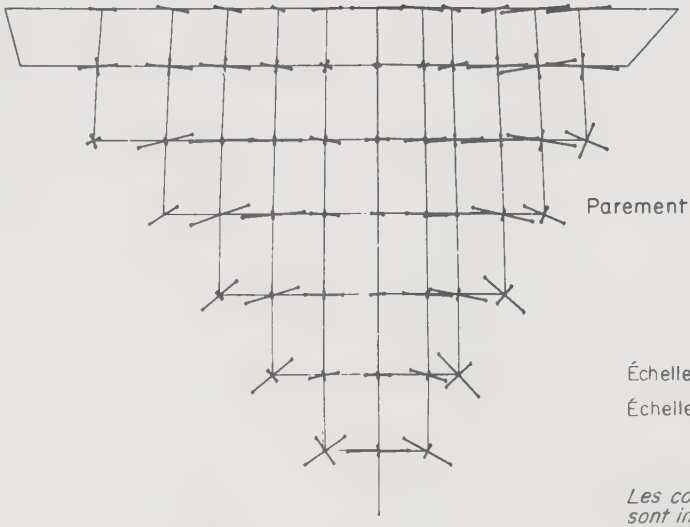
L'examen des résultats obtenus fait remarquer que :

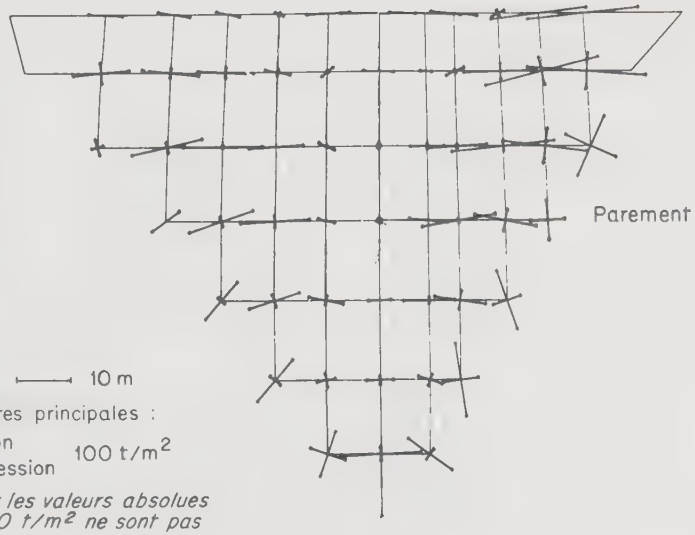
- les hypothèses choisies pour le partage des sollicitations aux nœuds d'appui ont une influence assez importante sur les maximums de traction ;

- tenir compte de l'effet de Poisson n'est pas très important, et surtout au point courant de l'ouvrage. Ce résultat est à rapprocher de celui donné par Copen [12].









Échelle du dessin —— 10 m

Échelle des contraintes principales :

traction
compression
100 t/m²

Les contraintes dont les valeurs absolues sont inférieures à 20 t/m² ne sont pas représentées.

Fig. VIII 14

Fig. VIII 15

VIII.6 - TABLEAU RÉCAPITULATIF DES DIFFÉRENTS CALCULS

N° du calcul	Nature du calcul	
VIII.A	Ajustement radial $E_f/E_b = 1$ (*)	fig. VIII.1
VIII.B	3 ajustements $E_f/E_b = 1$	VIII.2
VIII.C	4 ajustements $E_f/E_b = 1$	VIII.3
VIII.D	5 ajustements $E_f/E_b = 1$	VIII.4
VIII.E	6 ajustements $E_f/E_b = 1$	VIII.5
VIII.F	Résultats du modèle $E_f/E_b = 1$	fig. VIII.13
VIII.G	3 ajustements avec $E_f/E_b = 1/5$	fig. VIII.14
VIII.H	3 ajustements avec $E_f/E_b = 1/10$	fig. VIII.15
VIII.I	3 ajustements de "La Barthe" $E_f/E_b = 1$	
VIII.J	3 ajustements de "La Barthe" avec effet de Poisson et charges aux nœuds d'appui $E_f/E_b = 1$	

(*) E_f, module d'Young de la fondation
E_b, module d'Young du béton.

Conclusions

Le code de calcul que nous avons présenté permet de déterminer les efforts et les déplacements dans un barrage-voûte d'épaisseur variant continument et appuyé sur une fondation à contour régulier. L'hypothèse de comportement parfaitement élastique de l'ensemble est la base de ce calcul.

Ce code a permis de calculer un modèle de barrage réalisé en 1960 et les résultats ont été dans l'ensemble satisfaisants. Les écarts entre modèle et calcul sont localisés dans une zone de représentation difficile surtout au point de vue des angles d'attaque de la fondation et de la description du contour.

Il nous semble que l'ajustement de quatre composantes du déplacement (trois composantes de translation et une composante de rotation) suffise à décrire correctement le comportement de l'ouvrage.

L'influence d'une fondation très déformable sur un ouvrage aussi mince que celui qui a été analysé aboutit à une forte modification du champ des contraintes et à courber nettement les isostatiques.

Le Trial Load est une méthode qui a eu un succès considérable. Mais il n'est pas possible dans une recherche de la regarder comme la seule possible. En effet, il semble qu'il soit assez mal adapté à la prise en compte de contours de fondations à tracé discontinu, de changement rapide d'épaisseur ou de propriété des matériaux , ainsi qu'à celle des effets non linéaires. Dans ce dernier cas, il convient de partir d'équations tout à fait satisfaisantes au point de vue de la théorie de l'élasticité. L'hypothèse de partage de l'énergie peut à ce point de vue paraître insuffisante.

C'est pourquoi il convient d'explorer les méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles, (les méthodes par éléments finis et aux différences finies), voie abrupte s'il en est, puisque leur complexité dépasse la moyenne de ce qu'il est habituel de traiter. *C'est la voie que nous nous proposons de suivre dans notre prochain travail.*

Ceci d'autant plus que les techniques de calcul correspondantes font des progrès rapides, tout à fait équivalents à ceux accomplis par les ordinateurs.

Sous ces réserves, l'application d'un calcul du type Trial Load suffit dans un certain nombre de situations.

Bibliographie citée

[1] ALLEN D.N. de G. and WINDLE D.W. (1965). - The Three-dimensional solution of Arch Dams. Theory of Arch Dams, *Proceedings, International Symposium on the Theory of Arch Dams, Southampton University, England*, p. 31-44, Pergamon Press.

[2] ARGYRIS J.H. (1955). - Energy Theorems and Structural Analysis, *Aircraft Engineering*, Vol. 27.

[3] BEAUJOINT N. (1960). - Le calcul global des barrages-voûtes par les méthodes des arcs-murs généralisée à l'aide des plus puissantes machines à calculer électroniques. *Annales des Ponts et Chaussées.*

[4] BEAUJOINT N. (1965). - New Developments in traditional Methods of Analysis of Arch Dams *Proceedings, International Symposium on the Theory of Arch Dams, Southampton University, England*, p. 415-440, Pergamon Press.

[5] BENJAMIN C. (1964). - *Calcul des barrages-voutes*. Note interne du Centre de Recherches et d'Essais de l'Electricité de France à Chatou.

[6] BOISSERIE J.M. (1963). - Contraintes dans les barrages-voûtes et l'énergie de déformation élastique de coque. Electricité de France, *Bulletin du Centre de Recherches et d'Essais de Chatou*, n° 3.

[7] BOISSERIE J.M. (1963). - Formulations matricielles et équilibre élastique d'un barrage-voûte. Electricité de France, *Bulletin du Centre de Recherches et d'Essais de Chatou* n° 4.

[8] BOURGIN A. (1955). - *Cours de calcul de barrages*, Eyrolles.

[9] BUREAU OF RECLAMATION (U.S.A.) (1938). - The Trial Load Method of Analysing Arch Dams. Boulder Canyon Project Final Reports, Part 5, *Technical Investigations, Bureau of Reclamation*, Bulletin n° 1.

[10] BUREAU OF RECLAMATION (U.S.A.) (1956). - Treatise on Dams, Chapter 10, Arch Dams. Design Standard n° 2. U.S. Dept. of the Interior. Bureau of Reclamation.

[11] U.S. BUREAU OF RECLAMATION (1953). - *A ten years study of Creep properties of concrete* Report S.P. 38.

[12] COPEN M.D. (1965). - Trial Load Analysis and its Application to Modern Arch Dam Design. Theory of Arch Dams. *Proceedings, International Symposium on the Theory of Arch Dams, Southampton University, England*, p. 383-413, Pergamon Press.

[13] COURBON J. (1964). - *Cours de résistance des matériaux*. Tome 1, Dunod.

[14] COURBON J. (1965). - *Cours de résistance des matériaux*. Tome 2, Dunod.

[15] COYNE A. (1956). - Arch Dams ; their Philosophy, *Proc. A.S.C.E., J. Power Division*, April.

[16] DE SOUSA A.C. and DAVID S. (1965). - The formulation of the Problem of the Complete Adjustment for an Arch Dam for Electronic Computation ; Arch Dams and general Geometry on Anisotripic Foundations. *Proceedings, International Symposium on the Theory of Arch Dams, Southampton University, England*, p. 441-447, Pergamon Press.

[17] GOL'DENVIZER A.L. (1961). - *Theory of elastic thin shells*. Pergamon Press.

[18] HAYASHI M. (1965). - Influence of the Deformability of the Foundations on the Stresses in Arch Dams ; a numerical Approximation for the elastically fixed boundary Conditions in the Shell Analysis of Arch Dams. *Proceedings, International Symposium on the Theory of Arch Dams, Southampton University, England*, p. 585-622, Pergamon Press

[19] HOUSEHOLDER A.S. (1958). - Unitary Triangularization of a nonsymmetric Matrix. *Journal of A.C.M.* , October, vol. 5, n° 4.

[20] JENKINS R.S. (1965). - Two or three dimensional Analysis of the elastic Arch Dams. *Proceedings, International Symposium on the Theory of Arch Dams, Southampton University, England*, Pergamon Press.

[21] LOMBARDI J. (1955). - *Les barrages en voûte mince*. Rouge et Cie, Lausanne.

[22] LOVE A.E.H. (1927). - *A Treatise on the mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge University Press.

[23] MLADYENOVITCH V. (1958). - Calcul des barrages voûtes par résolution d'équations linéaires. *Travaux*, décembre.

[24] MLADYÈNOVITCH V. (1966). - Déformations des fondations de barrages. *Travaux*, novembre et décembre.

[25] RESAL J. (1919). - Formes et dimensions des grands barrages en maçonnerie. - *Annales des Ponts et Chaussées*, n° 2.

[26] SOBOTKA Z. (1966). - Some problems of non-linear Rheology. *Congrès de I.U.T.A.M.*, Grenoble, France.

[27] TONINI D. (1955). - Calcolo di verifica della digha di Pieve di Cadore con il metodo della ripartizione dei carichi tra archi e console. *L'Energia Elettrica*, p. 965-980.

[28] TONINI D. (1958). - Algebric Load Method of Analysing Arch Dams. *6th Congress on Large Dams*, New York, Vol. 4.

[29] TOTTENHAM H. and DESAI J.R. (1965). - Approximate Solutions in the Shell Theory of Arch Dams. *Proceedings, International Symposium on the Theory of Arch Dams, Southampton University, England*, p. 193-237, Pergamon Press.

[30] VOGT F. (1925). - Über die Berechnung der Fundamentdeformationen. *Aushandlinger ufigt av det Norske Videnskops-Academi, Oslo, I Mat. Naturv. Klasse*, Nr 2.

[31] VELTROP J.A. and WENGLER K.P. (1964). - Designs of Karadj Dam. *Journal Power Division, American Society of Civil Engineers*, March.

[32] ZIENKIEWICZ O.C. and CHEUNG Y.K. (1965). - Finite Element Method of Analysis for Arch Dam Shells and Comparison with Finite Difference Procedures. *Proceedings, International Symposium on the Theory of Arch Dams, Southampton University, England*, p. 441-477, Pergamon Press.

Annexe 1

Théorie des coques d'épaisseur moyenne "géométrie - équations d'équilibre"

1.A - GÉOMÉTRIE D'UNE COQUE

L'exposé que nous donnons s'appuie en partie sur une présentation de Langhaar.

Soit une surface définie par les relations :

$$X = X(\alpha, \beta) \quad , \quad Y = Y(\alpha, \beta) \quad , \quad Z = Z(\alpha, \beta) \tag{1}$$

où X, Y et Z sont les coordonnées rectangulaires et (α, β) sont les paramètres de description de la surface.

Si $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont des vecteurs unitaires des axes X, Y et Z, un point (X, Y, Z) de la surface peut être défini par :

$$\vec{r} = \vec{i}\,X + \vec{j}\,Y + \vec{k}\,Z \tag{2}$$

qui peut être considérée comme l'équation vectorielle de la surface ; nous avons donc :

$$\overrightarrow{dr} = \vec{r}_\alpha \, d\alpha + \vec{r}_\beta \, d\beta \tag{3}$$

des vecteurs (*) $\vec{r}_\alpha$ et $\vec{r}_\beta$ sont respectivement tangents aux lignes de coordonnées α et β. Les lignes α = Cte et β = Cte sont orthogonales si :

$$\vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\beta = 0 \tag{4}$$

Nous nous plaçons directement dans ce cas.

La distance qui sépare les points $M(\alpha, \beta)$ et $M'(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$ est égale à :

$$ds^2 = \vec{dr} \cdot \vec{dr} = A^2\, d\alpha^2 + B^2\, d\beta^2 \qquad \text{tenant compte de (4),}$$

et avec :

$$\begin{aligned} A^2 &= \vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\alpha = X_\alpha^2 + Y_\alpha^2 + Z_\alpha^2 \\ B^2 &= \vec{r}_\beta \cdot \vec{r}_\beta = X_\beta^2 + Y_\beta^2 + Z_\beta^2 \end{aligned} \tag{5}$$

L'aire de la surface comprise à l'intersection d'un domaine dont on connaît l'équation $g(\alpha, \beta) = 0$ est :

$$\iint_D AB \; d\alpha \; d\beta$$

(*) $r_\alpha = \dfrac{\partial r}{\partial \alpha}$, $r_\beta = \dfrac{\partial r}{\partial \beta}$

et le vecteur normal à la surface est :

$$\vec{n} = \frac{\vec{r_\alpha} \wedge \vec{r_\beta}}{AB} \tag{6}$$

Le sens positif sur la normale est celui du vecteur $\vec{n}$, défini par cette équation. On connaît également une seconde forme quadratique :

$$- \overrightarrow{dr} \cdot \overrightarrow{dn} = e\,d\alpha^2 + 2f\,d\alpha\,d\beta + g\,d\beta^2 \tag{7}$$

avec :

$$e = \frac{1}{AB} \times \begin{vmatrix} X_{\alpha\alpha} & Y_{\alpha\alpha} & Z_{\alpha\alpha} \\ X_\alpha & Y_\alpha & Z_\alpha \\ X_\beta & Y_\beta & Z_\beta \end{vmatrix} \qquad f = \frac{1}{AB} \times \begin{vmatrix} X_{\alpha\beta} & Y_{\alpha\beta} & Z_{\alpha\beta} \\ X_\alpha & Y_\alpha & Z_\alpha \\ X_\beta & Y_\beta & Z_\beta \end{vmatrix}$$

$$g = \frac{1}{AB} \times \begin{vmatrix} X_{\beta\beta} & Y_{\beta\beta} & Z_{\beta\beta} \\ X_\alpha & Y_\alpha & Z_\alpha \\ X_\beta & Y_\beta & Z_\beta \end{vmatrix}$$

La forme $\overrightarrow{dr} \cdot \overrightarrow{dn}$ en fonction du rapport $d\alpha/d\beta$ a en général deux valeurs extrêmes $1/r_1$ et $1/r_2$ appelées "courbures principales" de la surface lorsque $d\alpha/d\beta$ prend des valeurs associées aux directions principales.

En se reportant à la géométrie différentielle, si et seulement si les coordonnées sont orthogonales et f = 0, les lignes de courbure principales coïncident avec des lignes de coordonnées. Dans ce cas :

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{e}{A^2} \quad , \quad \frac{1}{r_2} = -\frac{g}{B^2} \tag{8}$$

Si les lignes de courbures sont lignes de coordonnées ($\vec{r_x} \cdot \vec{r_y} = 0$, f = 0), on a en outre les relations déduites du théorème de Rodrigues :

$$\frac{\overrightarrow{\partial n}}{\partial \alpha} = \frac{1}{r_1} \frac{\overrightarrow{\partial r}}{\partial \alpha} \quad , \quad \frac{\overrightarrow{\partial n}}{\partial \beta} = \frac{1}{r_2} \frac{\overrightarrow{\partial r}}{\partial \beta} \tag{9}$$

Le produit $K = \frac{1}{r_1 r_2}$ est appelé "courbure gaussienne".

Si les lignes coordonnées sont orthogonales, K satisfait l'équation différentielle :

$$KAB + \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right) = 0 \tag{10}$$

qui est l'équation de Gauss.

Cette équation montre que K est déterminé par la seule donnée de A et B. Donc, si une surface est déformée sans changement de sa métrique, la courbure gaussienne ne change pas.

Les fonctions A, B, r_1, r_2 satisfont également deux équations différentielles de Codazzi. Si les lignes de coordonnées coïncident avec des lignes de courbure principale, ces équations deviennent :

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{r_1}\right) = \frac{1}{r_2}\frac{\partial A}{\partial\beta} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{r_2}\right) = \frac{1}{r_1}\frac{\partial B}{\partial\alpha} \tag{11}$$

En théorie des coques, la surface moyenne est décrite comme une surface et une coordonnée supplémentaire z est utilisée pour décrire le milieu résistant dans son ensemble. z est compté sur la normale orientée de la théorie des surfaces.

La position d'un point de la coque sur la surface moyenne est définie par le vecteur $\vec{r}$. Si sa distance à la surface moyenne est donnée par z, nous avons :

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{n}z \tag{12}$$

En dérivant :

$$\vec{R}_\alpha = \vec{r}_\alpha + \vec{n}_\alpha z \quad , \quad \vec{R}_\beta = \vec{r}_\beta + \vec{n}_\beta z \tag{13}$$

Si nous prenons pour lignes de coordonnées les lignes de courbure principales, les relations de Rodrigues avec les relations (13) donnent :

$$\vec{R}_\alpha = \left(1 + \frac{z}{r_1}\right)\vec{r}_\alpha \quad , \quad \vec{R}_\beta = \left(1 + \frac{z}{r_2}\right)\vec{r}_\beta \quad , \quad \vec{R}_z = \vec{n}$$

Nous sommes donc en mesure de calculer la métrique de toutes les surfaces qui se déduisent de la surface moyenne par l'opération (12).

Soit A', B', C' les coefficients de cette métrique :

$$A' = A\left(1 + \frac{z}{r_1}\right) \quad , \quad B' = B\left(1 + \frac{z}{r_2}\right) \quad , \quad C' = 1 \tag{14}$$

qui s'obtient des équations :

$$\vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\alpha = A^2 \quad , \quad \vec{r}_\beta \cdot \vec{r}_\beta = B^2 \quad \text{et} \quad \vec{r}_\alpha \cdot \vec{n} = \vec{r}_\beta \cdot \vec{n} = \vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\beta = 0,$$

ce qui donne :

$$ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2 + C^2 dz^2 \tag{15}$$

1.B - ÉQUILIBRE D'UNE COQUE

Nous nous proposons de déterminer les équations d'équilibre des coques par application du calcul des variations à la forme mixte de l'énergie. Ceci suppose connue l'analyse de la déformation élémentaire telle qu'elle est décrite par Love et Gol'denvizer.

La déformation élémentaire de membrane est définie par ε_α, ε_β, ϖ_1, ϖ_2 et la déformation élémentaire de dalle par

$$\varkappa_\alpha \ , \ \varkappa_\beta \ , \ \tau_1 \ , \ \tau_2 \ .$$

On remarque que dans le cas d'une poutre $\varepsilon_\alpha = N/ES$ et $\varepsilon_\beta = \varpi_1 = \varpi_2 = 0$. Si la poutre ne s'allonge pas

$$\varkappa_\alpha = \frac{M}{EI} \quad \text{et} \quad \varkappa_\beta = \tau_1 = \tau_2 = 0$$

L'analyse de la déformation élémentaire permet d'établir la correspondance entre les déformations élémentaires et les déplacements u, v, w.

Les relations déformation - déplacement peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_\beta \\ \varpi_1 \\ \varpi_2 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccccccc|} \hline & \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta} & \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial z} & \frac{1}{A} & & & \\ \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha} & & \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial z} & & & & \frac{1}{B} \\ -\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta} & & & & \frac{1}{A} & & \\ & -\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha} & & & & \frac{1}{B} & \\ \hline \end{array} \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \\ \frac{\partial u}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial v}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial u}{\partial \beta} \\ \frac{\partial v}{\partial \beta} \end{vmatrix}$$

Et :

$$\begin{vmatrix} \varkappa_\alpha \\ \varkappa_\beta \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccccccccc|} \hline & \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta} & & \frac{1}{A} & & & & & -\frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial \beta} \\ \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha} & & & & & -\frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial \alpha} & & \frac{1}{B} & \\ -\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta} & & & & \frac{1}{A} & \frac{1}{A^2B}\frac{\partial A}{\partial \beta} & & & \\ & -\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha} & & & & & \frac{1}{B} & & \frac{1}{AB^2}\frac{\partial B}{\partial \alpha} \\ \hline \end{array} \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \\ \frac{\partial u}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial v}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial w}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial u}{\partial \beta} \\ \frac{\partial v}{\partial \beta} \\ \frac{\partial w}{\partial \beta} \end{vmatrix}$$

On note que :

$$\varpi = \varpi_1 + \varpi_2$$

$$\tau = \tau_1 + \tau_2$$

L'énergie de déformation de l'élément différentiel d'une coque moyenne est donnée comme la somme de deux énergies, l'énergie de membrane et l'énergie de dalle.

En terme de déplacement (*) :

$$V_m = \frac{E\,h}{1 - \nu^2}\left[\varepsilon_\alpha^2 + \varepsilon_\beta^2 + 2\nu\,\varepsilon_\alpha\,\varepsilon_\beta + \frac{1}{2}(1 - \nu)\,\varpi^2\right] d\alpha\; d\beta$$

$$V_d = \frac{E\,h^3}{3(1 - \nu^2)}\left[k_\alpha^2 + k_\beta^2 + 2\nu\,\varkappa_\alpha\,\varkappa_\beta + \frac{1}{2}(1 - \nu)\,\tau^2\right] d\alpha\; d\beta$$

et en terme d'effort :

$$V_m = \frac{1}{2\,E\,h}\,[T_1^2 + T_2^2 - 2\nu\,T_1\,T_2 - 2(1 + \nu)\,S_1\,S_2]\; d\alpha\; d\beta$$

$$V_d = \frac{3}{2\,E\,h^3}\,[G_1^2 + G_2^2 - 2\nu\,G_1\,G_2 - 2(1 + \nu)\,H_1\,H_2]\; d\alpha\; d\beta$$

avec les notations de Love :

$T_1 \cdot d\alpha$	$T_2 \cdot d\beta$	Forces normales
$S_1 \cdot d\alpha$	$S_2 \cdot d\beta$	Forces correspondant à des efforts tranchants
$N_1 \cdot d\alpha$	$N_2 \cdot d\beta$	
$G_1 \cdot d\alpha$	$G_2 \cdot d\beta$	Couples de flexion
$H_1 \cdot d\alpha$	$H_2 \cdot d\beta$	Couples de torsion

Love montre que ce qui en résulte pour les déformations ne permet pas de calculer les composantes des contraintes qui sont statiquement équivalentes à N_1 et N_2 (voir figure 1). De là l'absence de N_1 et de N_2 dans l'expression de l'énergie.

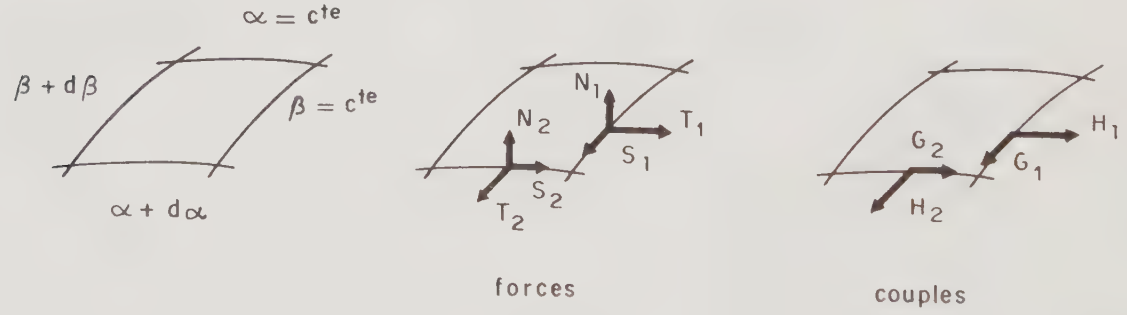


Fig. 1

(*) h est la demi-épaisseur.

D'autre part, les relations efforts - déformations dans une coque s'écrivent :

$$T_1 = \frac{2Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_\alpha + \nu\varepsilon_\beta) \quad , \quad T_2 = \frac{2Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_\beta + \nu\varepsilon_\alpha)$$

$$S_1 = \frac{Eh}{1+\nu}\varpi \quad , \quad S_2 = \frac{Eh}{1+\nu}\varpi$$

$$G_1 = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(\varkappa_\alpha + \nu\varkappa_\beta) \quad , \quad G_2 = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(\varkappa_\beta + \nu\varkappa_\alpha)$$

$$H_1 = \frac{2Eh^3}{3(1+\nu)}\tau \quad , \quad H_2 = -\frac{2Eh^3}{3(1+\nu)}\tau$$

Comme nous avons montré pour le cas d'une poutre, l'équation d'Euler de la fonctionnelle d'énergie en forme mixte donne les équations d'équilibre de la coque.

La charge extérieure à l'élément de coque est $\vec{P}\,AB\,d\alpha\,d\beta$. Le vecteur $\vec{P}$ est la charge extérieure par unité de surface moyenne ; donc, il est fonction de (α, β).

En plus des charges extérieures $\vec{P}\,AB\,d\alpha\,d\beta$, un couple résultant $\vec{R}\,AB\,d\alpha\,d\beta$ peut être pris en compte. En général, la composante de $\vec{R}$ suivant z est nulle (*).

Pour une fonctionnelle à double intégration, en se limitant au premier ordre, les équations d'Euler s'obtiennent en faisant le produit de la fonctionnelle par l'opérateur ci-dessous :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & -\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial u/\partial\alpha} & -\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial u/\partial\beta} \\ \frac{\partial}{\partial v} & -\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial v/\partial\alpha} & -\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial v/\partial\beta} \\ \frac{\partial}{\partial w} & -\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial w/\partial\alpha} & -\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial w/\partial\beta} \end{vmatrix}$$

et en égalant à zéro les résultats.

1.B.1 - Cas d'une membrane

L'énergie potentielle d'une membrane est :

$$V_m = \iint\left[\frac{1}{2}(T_1\,\varepsilon_\alpha + T_2\,\varepsilon_\beta + S_1\,\varpi_1 + S_2\,\varpi_2) - P(\alpha,\ \beta,\ z)\right] AB\,d\alpha\,d\beta$$

Nous allons trouver les équations d'Euler de cette fonctionnelle. La première équation :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial u}(\ )}_{\xi_1} \quad \underbrace{-\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial u/\partial\alpha}(\ )}_{\xi_2} \quad \underbrace{-\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial u/\partial\beta}(\ )}_{\xi_3} = 0$$

(*) Les composantes de $\vec{P}$ sont notées par P (α), P (β), P (z) et les composantes de $\vec{R}$ par R(α) et R (β).

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\left[T_1 \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial u} + \varepsilon_\alpha \left(\frac{\partial T_1}{\partial \varepsilon_\alpha} \cdot \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial u} + \frac{\partial T_1}{\partial \varepsilon_\beta} \cdot \frac{\partial \varepsilon_\beta}{\partial u} \right) + T_2 \frac{\partial \varepsilon_\beta}{\partial u} + \varepsilon_\beta \left(\frac{\partial T_2}{\partial \varepsilon_\alpha} \cdot \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial u} + \frac{\partial T_2}{\partial \varepsilon_\beta} \cdot \frac{\partial \varepsilon_\beta}{\partial u} \right) + S_1 \frac{\partial \varpi_1}{\partial u} + \varpi_1 \frac{\partial S_1}{\partial \varpi_1} \cdot \frac{\partial \varpi_1}{\partial u} + S_2 \frac{\partial \varpi_2}{\partial u} + \varpi_2 \frac{\partial S_2}{\partial \varpi_2} \cdot \frac{\partial \varpi_2}{\partial u} \right] AB - ABP(\alpha)$$

qui se réduit à :

$$\left[\frac{1}{2} \left(2 T_2 \frac{\partial \varepsilon_\beta}{\partial u} + 2 S_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) - P(\alpha) \right] AB$$

ou :

$$T_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} - S_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - ABP(\alpha)$$

et les deux autres termes (termes ξ_2 et ξ_3) nous donnent :

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha}(BT_1) \quad \text{et} \quad -\frac{\partial}{\partial \beta}(AS_2).$$

Donc la 1ère équation d'équilibre est :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BT_1) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AS_2) + S_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - T_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + ABP(\alpha) = 0$$

et de la même façon :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BS_1) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AT_2) + S_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} - T_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + ABP(\beta) = 0$$

$$-\frac{T_1}{r_1} - \frac{T_2}{r_2} + P(z) = 0$$

1.B.2 - Cas d'une dalle

L'énergie de la dalle est :

$$V_d = \iint \left[\frac{1}{2} (G_1 \varkappa_\alpha + G_2 \varkappa_\beta + H_1 \tau_1 + H_2 \tau_2) - R(\alpha, \beta) \right] AB \, d\alpha \, d\beta$$

Les équations d'équilibre sont les équations d'Euler de cette énergie.

Nous obtenons 2 équations de la même façon que pour la membrane.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BG_1) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AH_2) + H_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - G_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + ABR(\alpha) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BH_1) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AG_2) + H_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} - G_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - ABR(\alpha) = 0$$

La sixième équation d'équilibre se déduit à partir des relations efforts - déformation sous la forme :

$$\frac{H_1}{r_1} + \frac{H_2}{r_2} + S_1 + S_2 = 0$$

ou dans les cas plus simples :

$$S_1 + S_2 = 0$$

Ces 6 dernières équations sont les équations d'équilibre de la coque en terme d'effort. En tenant compte des relations effort-déplacement, nous pouvons obtenir assez facilement les équations d'équilibre en terme de déplacement.

Les équations ci-dessus ne contiennent pas des termes en N_1 et N_2, puisque ces derniers ne figurent pas dans la fonctionnelle de l'énergie. Les équations d'équilibre complet sont :

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BT_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AS_2) + S_1\frac{\partial A}{\partial\beta} - T_2\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{ABN_1}{R_1} + ABP(\alpha) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BS_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AT_2) + S_2\frac{\partial B}{\partial\alpha} - T_1\frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{ABN_2}{R_2} + ABP(\beta) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BN_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AN_2) - \frac{AB}{R_1}T_1 - \frac{AB}{R_2}T_2 + ABP(z) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BG_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AH_2) + H_1\frac{\partial A}{\partial\beta} - G_2\frac{\partial B}{\partial\alpha} - ABN_1 + ABR(\alpha) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BH_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AG_2) + H_2\frac{\partial B}{\partial\alpha} - G_1\frac{\partial A}{\partial\beta} - ABN_2 - ABR(\beta) = 0$$

$$\frac{H_1}{R_1} + \frac{H_2}{R_2} + S_1 + S_2 = 0$$

Annexe 2

Invariance d'un calcul d'ajustement par répartition préliminaire des charges extérieures

La retenue, étant en équilibre hydrostatique, exerce sur un élément dS de parement amont une poussée réductible à une force unique.

Mais cet élément de parement amont appartient à la fois à l'extrados d'un arc et à celui d'une console. C'est ce que nous exprimons en disant que les arcs et les consoles se partagent la poussée de la retenue. Avant ajustement, les arcs et les consoles subissent respectivement des charges qui ne satisfont qu'à une seule condition : leur somme est égale à la charge extérieure du barrage. Dans le cas simple où les sections horizontales du barrage sont constituées par des anneaux, il est particulièrement simple de "mettre toute la poussée" sur les arcs, poussée qui se réduit avec une bonne approximation à la composante horizonto-radiale.

Le problème est de savoir l'influence de ce choix arbitraire sur la solution finale.

La charge type ajustante, ou élément unitaire de champ ajustant, est essentiellement une force intérieure à l'ouvrage. Elle doit donc avoir extérieurement un effet nul. Ainsi, elle est appliquée avec un signe positif au "barrage des arcs" et avec un signe négatif au "barrage des consoles".

Par contre, les charges extérieures sont appliquées dans une première fraction à l'arc et pour le reste à la console.

C'est cette différence de nature qui doit être prise en compte et qui complique légèrement la preuve de la proposition suivante :

2.A - PROPOSITION

Dans la mesure où ce sont les mêmes formules qui aboutissent au "Défaut d'ajustement" et au "Pouvoir ajustant" (*), la solution finale est rigoureusement indépendante du partage initial.

2.B - DÉMONSTRATION

Pour démontrer cette proposition, nous donnons :

- les conventions et formulaire,
- les équations générales de l'ajustement,
- la preuve proprement dite.

2.B.1 - Conventions

Pour des raisons de simplicité d'écriture, nous employons la convention de l'indice muet, c'est-à-dire que les sommations ne sont pas indiquées autrement que par la répé-

---

(*) Pour la définition de "Défaut d'ajustement" et "Pouvoir ajustant", voir § 2.B.1.

tition du même groupe d'indice en position haute et en position basse. Si l'indice i court de 1 à n, nous écrivons :

$$A_i \, B^i \qquad \text{au lieu de} \quad \sum_{i=1}^{i=n} A_i \, B_i$$

Nous entendons par "déplacement" un vecteur, fonction de point, calculé dans des points discrets, dont les composantes sont la projection de la translation et de la rotation d'un trièdre attaché à une portion de solide dont la position initiale est l'état de référence.

L'indice TE est attaché aux différentes composantes du déplacement, cet indice court de 1 à 6 (cas général). L'indice TS est attaché aux composantes de sollicitations courant de 1 à 6. Si le point est influencé, l'indice considéré est ICE. Si le point considéré est influençant, l'indice correspondant est : I A N.

Le résumé des notations se trouve au tableau suivant :

Sollicitations	Effets "Déplacement"
Charges unitaires auto-équilibrées	Sur les arcs : $[I\,C\,A]^{TS,\,IAN}_{TE,\,ICE}$
	Sur les consoles : $[I\,C\,C]^{TS,\,IAN}_{TE,\,ICE}$
Charges extérieures partagées $[C\,P]$ $[C\,P]_{TS,\,IAN} = [C\,P\,A]_{TS,\,IAN} + [C\,P\,C]_{TS,\,IAN}$	Sur les arcs : $[V\,D\,A]^{TS,\,IAN}_{TE,\,ICE}$
	Sur les consoles : $[V\,D\,C]^{TS,\,IAN}_{TE,\,ICE}$

Nous convenons d'appeler :

a) les $[I\,C\,A]^{TS,\,IAN}_{TE,\,ICE}$ la "déformabilité complète des arcs",

b) les $[I\,C\,C]^{TS,\,IAN}_{TE,\,ICE}$ la "déformabilité complète des consoles",

c) la différence $[V\,D\,A]^{TS,\,IAN}_{TE,\,ICE} - [V\,D\,C]^{TS,\,IAN}_{TE,\,ICE}$ le "défaut d'ajustement",

d) la somme $[I\,C\,A]^{TS,\,IAN}_{TE,\,ICE} + (-[I\,C\,C]^{TS,\,IAN}_{TE,\,ICE})$ le "pouvoir ajustant".

Enfin, nous convenons d'appeler "champ ajustant" les densités des charges types qui annulent le défaut d'ajustement provoqué par le partage initial imparfait de la sollicitation extérieure.

Ce champ ajustant est défini par des nombres :

$$[X]_{TS,\,IAN}$$

2.B.2 - Pose des équations

Si nous désignons par :

O : la position initiale - état de référence d'un nœud,

M : la position du nœud après ajustement,

A : la position du nœud par l'arc en fausse position,

C : la position du nœud par la console en fausse position.

Comme le déplacement $\overrightarrow{OM}$ des nœuds après ajustement est identique sur les arcs et les consoles correspondants et étant donné :

$$\overrightarrow{dep}_{arc} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{dep}_{con} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$$

Les équations d'ajustement s'obtiennent en prenant les composantes scalaires de l'équation vectorielle :

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$$

Etant donné que les déplacements obtenus dans le premier membre sont dus aux charges $[CPA]_{TS,IAN}$ et $[CPC]_{TS,IAN}$ et que ceux du second membre sont dus au champ ajustant, nous pouvons écrire :

$$-[VDA]_{TE,ICE} + [VDC]_{TE,ICE} = ([ICA]^{TS,IAN}_{TE,ICE} - [ICC]^{TS,IAN}_{TE,ICE}) \times [X]_{TS,IAN}$$

2.B.3 - Invariance de la solution

Dans le cas où on ne tient pas compte de l'effet de Poisson, la démonstration qui suit montre l'indépendance de la solution vis à vis du partage initial.

Nous pourrons assimiler $[CPA]_{TS,IAN}$ et $[CPC]_{TS,IAN}$ à des parties respectivement positives et négatives de charges complètes, ce qui permettrait d'écrire :

$$\begin{aligned} [VDA]_{TE,ICE} &= [CPA]_{TS,IAN} \times [ICA]^{TS,IAN}_{TE,ICE} \\ [VDC]_{TE,ICE} &= [CPC]_{TS,IAN} \times -([ICC]^{TS,IAN}_{TE,ICE}) \end{aligned} \qquad (2.B.1)$$

Modifions le partage initial en laissant invariante la somme $[CPA]_{TS,IAN} + [CPC]_{TS,IAN}$ En conséquence, $[CPA]_{TS,IAN}$ devient : $[CPA]_{TS,IAN} + d([CPA])$ et $[CPC]_{TS,IAN}$ devient $[CPC]_{TS,IAN} + d([CPC])$.

Les équations d'ajustement seront écrites de la façon suivante en utilisant les formules 2.B.1 :

$$[IAC]^{TS,IAN}_{TE,ICE} (-[CPA]_{TS,IAN} - [X]_{TS,IAN}) = (-[ICC]^{TS,IAN}_{TE,ICE}) \times (-[CPC]_{TS,IAN} + [X]_{TS,IAN})$$

Nous voyons que l'introduction de $d([CPA])$ a pour conséquence de diminuer $[X]_{TS,IAN}$ de $d([CPA])$ et laisse donc invariante la somme de $[X]_{TS,IAN} + [CPA]_{TS,IAN}$ qui est la charge extérieure aux arcs et caractérise la solution.

La prise en compte de l'effet de Poisson complique légèrement cette démonstration. parce que nous ne pouvons plus assimiler $[C\,P\,A]_{TS,\,IAN}$ et $[C\,P\,C]_{TS,\,IAN}$ à des parties positives et négatives de charges complètes et nous devons pousser plus loin la décomposition du pouvoir ajustant.

Pour calculer les $[I\,C\,A]^{TS,\,IAN}_{TE,\,ICE}$, nous devons procéder en deux temps en évaluant successivement :

- l'action sur les arcs de la partie positive de la charge type appliquée à l'arc AN qui passe par le point n.

Ces termes ne diffèrent de zéro que si le nœud influencé a le numéro d'un point d'arc AN.

Les déplacements correspondants sont décrits par $[I\,C\,A\,A]^{TS,\,IAN}_{TE,\,ICE}$;

- l'action sur les arcs de la partie négative de la composante unitaire du champ ajustant appliquée à la console CN qui passe par le nœud n. Cette partie de la charge ajustante induit des efforts dans la partie de CN située au-dessous de AN.

Par effet de Poisson, ces efforts déplacent les arcs situés au-dessous de AN.

Les déplacements correspondants sont décrits par les coefficients $[I\,C\,A\,C]^{TS,\,IAN}_{TE,\,ICE}$.

De même, pour calculer $[I\,C\,C]^{TS,\,IAN}_{TE,\,ICE}$ sont considérés successivement :

- l'action sur les consoles de la partie positive de la charge type appliquée à l'arc AN passant par le point n. Les effets d'arcs ainsi induits déplacent par effet de Poisson les consoles coupées par l'arc AN dans leur partie située au-dessus de AN.

Ces déplacements sont décrits par les coefficients $[I\,C\,C\,A]^{TS,\,IAN}_{TE,\,ICE}$;

- l'action sur les consoles de la partie négative de la charge type appliquée à la console CN.

Ces effets se composent en deux termes :

- effets directs en terme de déplacement sur la console CN en tous les points de celle-ci ;

- effets indirects par effet de Poisson.

En effet, les efforts induits dans CN créent par effet de Poisson dans les arcs coupés par CN et situés au-dessous de AN des déplacements et surtout des efforts. Ces efforts par effet de Poisson déplacent les consoles.

Ces déplacements sont décrits par les coefficients $[I\,C\,C\,C]^{TS,\,IAN}_{TE,\,ICE}$.

Les coefficients [I C A A], [I C A C], [I C C A] et [I C C C] permettent d'exprimer le défaut d'ajustement par :

$$[V\,D\,A]_{TE,\,ICE} = [C\,P\,A]_{TS,\,IAN}\,([I\,C\,A\,A]^{TS,\,IAN}_{TE,\,ICE} + [I\,C\,A\,C]^{TS,\,IAN}_{TE,\,ICE})$$

$$[V\,D\,C]_{TE,\,ICE} = -\,[C\,P\,C]_{TS,\,IAN}\,([I\,C\,C\,A]^{TS,\,IAN}_{TE,\,ICE} + [I\,C\,C\,C]^{TS,\,IAN}_{TE,\,ICE}) \qquad (2.B.2)$$

et d'écrire également les équations d'ajustement

$$- [CPA]_{TS,IAN} \left([ICAA]^{TS,IAN}_{TE,ICE} + [ICAC]^{TS,IAN}_{TE,ICE}\right) - [CPC]_{TS,IAN} \left([ICCA]^{TS,IAN}_{TE,ICE} + [ICCC]^{TS,IAN}_{TE,ICE}\right)$$

$$= \left([ICAA]^{TS,IAN}_{TE,ICE} + [ICAC]^{TS,IAN}_{TE,ICE} - [ICCA]^{TS,IAN}_{TE,ICE} - [ICCC]^{TS,IAN}_{TE,ICE}\right) [X]_{TS,IAN}$$

Nous voyons donc que le changement du partage initial a la même conséquence que dans le cas simple précédemment étudié, à savoir que $[X]_{TS,IAN}$ devient $[X]_{TS,IAN} - d([CPA])$ et que la densité extérieure de la charge aux arcs, par exemple, reste invariante.

Remarque :

Il faut bien insister sur le fait que l'invariance n'est assurée que dans la mesure où on peut exprimer le défaut d'ajustement par les formules 2.B.1 et 2.B.2, ce qui suppose :

- Que la charge extérieure varie linéairement entre les nœuds ;
- Que la charge extérieure est représentable par des combinaisons de charges triangulaires.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

"UTILISATION FRIGORIFIQUE ET THERMIQUE DES SEMICONDUCTEURS".

Vu et approuvé :
Paris, le 12 juillet 1967
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Marc ZAMANSKY

Vu
et Permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie
de Paris,
Jean ROCHE